様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　４月１３日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2008～2011
課題番号：２０５４０１２１
研究課題名（和文）　不規則媒質中のランダムウォークの漸近挙動の研究

研究課題名（英文）　Asymptotic behavior of random walks in random environment

研究代表者
濱名　裕治（HAMANA YUJI）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：００２４３９２３

研究成果の概要（和文）：
本研究では，ブラウン運動が定める筒型集合（これは Wiener sausage とよばれている）の体積の期待値についての研究を行った．これは，熱伝導問題に関連して長年研究されてきている．まず，時刻 t までの Wiener sausage の体積の期待値の t がゼロに近づくとき挙動と無限大に発散するときの挙動が得られた．
さらに，ブラウン運動の半径方向の運動を一般化したベッセル過程とよばれる確率過程の到達時刻が t 以下となる確率を，変形ベッセル関数とよばれる特殊関数とその零点を用いて表示した．この表示から，t が大きくなるときの漸近挙動も得られた．
ここで用いられた手法を修正することにより，Wiener sausage の体積の期待値も変形ベッセル関数とその零点で表示することができた．このことにより，t が増大するときの漸近展開を与えることに道筋がついた．

研究成果の概要（英文）：
On this research we investigated the expectation of the cylindrical set determined by a Brownian motion, which is so-called Wiener sausage. This object has been investigated for long time in connection with heat conduction problems. We first deduced asymptotic behaviors of the expected volume of the Wiener sausage up to time t as t tends to zero and infinity.
In addition, we represented the probability that the first hitting time of the stochastic process generalized from the radial motion of the Brownian motion, which is called the Bessel process, is not large than t by means of the Bessel functions of the second kind and their zeros. By the resulting formula, we obtain the asymptotic behavior of the probability as t tends to infinity.
With the help of the modified method used to obtain the representation, we can derive the mean volume of the Wiener sausage up to time t by means of the Bessel functions of the second kind and their zeros. Moreover, this result is expected to derive its asymptotic expansion for large time.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
２００９年度	600,000	180,000	780,000
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
２０１１年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：確率論
科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：ランダムウォーク，不規則媒質，ブラウン運動，Wiener sausage，ベッセル過程，大偏差原理，エントロピー関数

１．研究開始当初の背景

物理学において，ランダム系あるいは不規則系とよばれている対象の研究が始まってからずいぶんと時間が経つが，その動機一つとして規則系の統計物理学から不規則系の統計物理学への移行が挙げられる．数学において取り扱われるものは，物理学で扱われるものと比較してかなり限定されているが，その問題の性質から，確率論においては活発に研究が行われ１９６０年代から７０年代にかけては，量子力学との関連でランダムポテンシャルを持つシュレディンガー作用素のスペクトルが研究された．それと並行する形で，ランダムに不純物を含む正方格子上のランダムウォーク（ランダム媒質中のランダムウォークとよばれる）の数学的な定式化が行われ，そのランダムウォークの大域的な挙動について研究されてきた．

このランダム媒質中のランダムウォークは，最初に，１次元の場合において，確率１で出発点に戻れるかどうかを問ういわゆる再帰性の問題が研究され，再帰的であるための必要十分条件が与えられたが，均一な媒質の中のランダムウォークからは想像もできない結果となり，研究者をおどろかせた．そのことが，そのまま，世界の多くの研究者から興味を引くこととなり，多次元格子におけるランダム媒質中のランダムウォークの再帰性の研究の出発点となった．さらに，確率過程としての大域的な性質，特に，大数の法則，中心極限定理などの小偏差原理，あるいは大偏差原理といった極限定理の研究がなされ，問題の解決を見るに至ったが，その場合においても，均一媒質の中のランダムウォークからは想像もできない結果が示され，再帰性の問題と合わせて，対象の興味が多次元へと移行することとなった．しかし，１次元の場合と空間の構造が根本的に異なるために，不規則性がきわめて低い場合においては，次元３以上で過渡的といった結果しか得られておらず，その後，多くの研究者が問題解決に尽力したにもかかわらす，満足行く結果は得られていない．

そういった動きの中，１９９０年代から，古典的なランダムウォークの道の詳細な性質を用いることにことによって，多次元の場合の再帰性の条件を導こうとする試みが小谷眞一氏を中心に提唱され，多重点の個数に関するラプラス近似の研究されるに至った．このことで，ラプラス近似の前段階である大偏差原理の研究がとりあげられた．しかし，当時は大数の法則しか得られておらず，当時小谷研究室の大学院生であった濱名が中心極限定理と軸とする小偏差原理の研究にとりかかり，一定の結論を得るに至った．また，以前より，多重点の個数よりも解析が行いやすい訪問点の個数とその連続対応である Wiener sausage の体積については，大偏差原理等の関連する結果が得られていたが，完全解決まではまだ遠い道のりがあった．

２．研究の目的

格子におけるランダム媒質中のランダムウォークの再帰性も問題は，１次元の場合のみが解決されているので，本研究では，多次元格子におけるランダム媒質中のランダムウォークが再帰的となるための必要十分条件を与えるために，一様な媒質中のランダムウォークの多重点の個数に関する大偏差原理およびラプラス近似を確立させることを目的とする．

そのために，訪問点の個数や Wiener sausage の体積のエントロピー関数を決定し，大偏差原理を完全解決することを第一目標とする．

３．研究の方法

均一媒質中を動くいわゆる古典的な多次元ランダムウォークの道の詳しい性質を調べることによって問題を解決しようという試みが小谷眞一氏を中心とした研究者の間で提唱され現在に至っている．中でも，ランダムウォークの標本路の多重点の個数に関するラプラス近似を確立することによって問題解決をはかろうと研究されている．

そのためには，多重点よりも解析が容易な訪問点に的をしぼり，ラプラス近似の前段階の定理である大偏差原理を調べることが重要となる．さらに，訪問点の個数の連続対応であるブラウン運動に対する Wiener sausage の体積に関しての大偏差原理について調べることが効果的である．これは，連続時間，連続空間を対象とするもののほうが計算し易いという一般的な経験則による．一般に，大偏差原理の研究の際にはエントロピー関数とよばれるものが重要な役割を果たす．このエントロピー関数を求めるためには，すれをもつブラウン運動に対する Wiener sausage の体積の期待値をずれの関数としてみたときの連続性を示す．

また，Wiener sausage を調べる際にはブラウン運動の性質，主に到達時刻を調べるこ

とが重要である．特に，ずれをもつブラウン運動の到達時刻を調べることが必要であるが，その前段階として，ずれをもたないブラウン運動について到達時刻の分布関数の具体的な形や漸近挙動を与える．そのためには，ブラウン運動の半径方向の運動として知られているベッセル過程の到達時刻を考えることになる．

ベッセル過程の到達時刻や Wiener sausage の期待値の体積のラプラス変換は，第２種変形ベッセル関数の比で表示できることがわかっているが，確率論とベッセル関数の関係に詳しいのは山形大学の松本裕行教授で，松本教授から助言を受けさらに指導を仰ぐために山形大学に年間に数回訪問する．また，東京工業大学の内山耕平教授もランダムウォークとの関係から興味を持っており，内山教授との討議も不可欠である．これら二人の教授との研究討議の他にも，情報交換を行うため各地で行われている研究集会や研究者対象の確率論セミナーに出向き得られた成果を公表し，得られた結果に関する討議を行う．

４．研究成果

ブラウン運動に対する Wiener sausage の時刻ｔまでの体積の期待値に関する漸近挙動を研究した．時刻ｔが増大するときの体積の増加率は，古くから研究されており，自由エネルギー関数の原点での挙動に関係していることが知られているが，これはエントロピー関数の決定の視点に立つと上からの評価を与えたことになっている．

そこで，時刻 ｔ がゼロに減少する場合の Wiener sausage の体積の期待値挙動が自由エネルギー関数の上からの評価に関係し，それがエントロピー関数の下からの評価を与えることから，時刻がゼロに近い場合の体積の期待値の漸近挙動や級数展開を研究した．その結果，次元に関わらず，時刻ｔの平方根と同等の減少率であることがわかり，係数に動かした球の表面積が現れることもわかった．これは，一次近似であるが，奇数次元の場合は，さらに高次の近似を得ることができる．実際に，Wiener sausage の体積の期待値は，時刻ｔの平方根に関するべき級数に展開できることが証明でき，さらに各項の係数が，第２種変形ベッセル関数の零点で表現できることも得られた．

また，時刻ｔが大きい場合の漸近挙動も得ることができ，時刻ｔの半整数の負冪で展開できること，および，各項の係数が，第２種変形ベッセル関数の零点で表現できることが証明できた．ここでの証明は Wiener sausage の体積の期待値のラプラス変換が第２種変形ベッセル関数の比で表されることと第２種変形ベッセル関数は指数が半整数であるが整数でない場合には具体的な形が得られていることの２点が本質的である．

一方，偶数次元の場合には，第２種変形ベッセル関数の指数が整数となり奇数次元の場合とは状況がまったく異なるため，証明方針の根本的な変更が必要となる．そこで Wiener sausage の体積の期待値は，ベッセル過程の到達確率の出発点での積分あることに着目して，ベッセル過程の到達時刻の分布関数に関する公式を与えることにした．この到達時刻のラプラス変換は，変形ベッセル関数の比で表示されることが知られており，出発点が到達点よりも内側の場合は第１種，外側のときは第２種を用いて表される．前者の場合はすでに解決されており，第１種ベッセル関数とその零点で表されることがわかっている．本研究では，後者の場合に到達時刻の分布関数が第２種変形ベッセル関数とその零点で表示できることを証明した．これについては，近年，ポーランドの研究者によって研究が進められているが，形が複雑で公式としては難解なものになっている．そのため，何らかの表示がなされたということ以上にはあまり情報がない．さらに，彼らの結果以外には具体的な表示に関するものはない．ここで得られた表示は奇数次元，偶数次元の違い，既知の結果との関連などが一見してわかる形になっていて，関連の研究者の間では評価が高い．また，その表示から未解決となっていた分布関数の長時間漸近挙動を得ることができた．この漸近挙動については多くに研究者が興味を持つこととなった．さらに，同じ手法を用いて，到達時刻の密度関数と長時間漸近挙動を求めた．

得られた分布関数を出発点で積分すれば Wiener sausage の体積の期待値が得られるが，残念ながら，簡単に積分が計算できる形にはなっていない．このことは，分布関数を積分することはあきらめざるをえない状況にあることを意味するが，先にも述べたように，Wiener sausage の体積の期待値のラプラス変換も第２種変形ベッセル関数の比で表されることから，ベッセル過程の到達時刻の分布関数を表示するときに用いられた手法が，そのままではないが，ある程度の修正を加えることにより使えることがわかり，実際に求めることができた．これはすでに得られている奇数次元の場合の結果と合わせて Le Gall 氏の結果を，特別な場合であるが拡張したものとなっている．

一方，Wiener sausage の体積の期待値を考える際に導いた第２種変形ベッセル関数の

比に関する公式が，ベッセル過程の到達時刻の確率分布に対するレヴィ測度を導くことがわかった．ベッセル過程の到達時刻が無限分解可能分布であることは以前より知られていた．一般に無限分解可能分布にはレヴィ測度が唯一つ存在するが，具体的に求めるのは容易ではない．これは本研究の目的ではないので，当初は想定されておらず，意図したものではなかったが，結果としてレヴィ測度を与えることに成功した．このことは，加法過程の研究者には，少なからずインパクトを与えることとなった．

しかしながら，研究期間はここで終了し，Wiener sausage のエントロピー関数の決定に迫ることができなかったのは残念である．

今回はブラウン運動に対する Wiener sausage を考えたが，安定過程に対するものが Stone 氏によって研究されている．今回の研究で新たに開発された手法により，ずれをもつブラウン運動，安定過程，オルンスタイン・ウーレンベック過程といった標準ブラウン運動以外の拡散過程に対する Wiener sausage の体積に関する研究および到達時刻の分布関数や密度関数の研究への道を切り開くことになった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
① Yuji Hamana, The expected volume and surface area of the Wiener sausage in odd dimensions, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, 掲載予定
② Yuji Hamana, Hiroyuki Matsumoto, The probability distribution of the first hitting time of Bessel processes, Transactions of American Mathematical Society, 査読有, 掲載予定
③ Yuji Hamana, On the expected volume of the Wiener sausage, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有, 62 巻, 2010, 1113-1136

〔学会発表〕（計１０件）
① 濱名裕治, Bessel 過程の到達時刻と Wiener sausage の体積について, 研究集会「確率論における極限定理」, 2012.3.9, 筑波大学（茨城）
② 濱名裕治, 偶数次元ブラウン運動に対する Wiener sausage の体積の期待値について, 研究集会「確率論シンポジウム」, 2011.12.19, 関西大学（大阪）
③ 濱名裕治, 松本裕行, The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes, 研究集会「確率解析とその周辺」, 2011.11.11, 佐賀大学（佐賀）
④ 濱名裕治, 松本裕行, The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes, 日本数学会秋季総合分科会（統計数学分科会）, 2011.9.28, 信州大学（長野）
⑤ 濱名裕治, ベッセル過程の到達時刻について, 研究集会「確率解析とその周辺」, 2010.11.12, 岡山大学（岡山）
⑥ 濱名裕治, Wiener sausage の体積の期待値の漸近挙動について, 日本数学会春季年会（統計数学分科会）, 2010.3.24, 慶應義塾大学（神奈川）
⑦ 濱名裕治, Wiener sausage の体積の期待値について, 研究集会「確率論シンポジウム」, 2009.12.16, 愛媛大学（愛媛）
⑧ 濱名裕治, Wiener sausage を巡って, 研究集会「統計力学の数学的理論」2009.8.25, 大阪電気通信大学（大阪）
⑨ 濱名裕治, Wiener sausage とそれに関連する話題, 研究集会「確率解析の理論と応用-さよなら箱崎」, 2009.7.25, 九州大学（福岡）
⑩ 濱名裕治, Wiener sausage の体積の平均値について, 日本数学会九州支部例会, 2008.10.13, 鹿児島大学（鹿児島）

６．研究組織
(1)研究代表者

濱名　裕治（HAMANA YUJI）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：00243923