

機関番号 : 34416

研究種目 : 基盤研究 (C)

研究期間 : 2008 ~ 2010

課題番号 : 20540130

研究課題名 (和文)

純飛躍型マルコフ過程のディリクレ形式による確率解析

研究課題名 (英文)

Stochastic analysis of Markov processes in terms of Dirichlet forms

研究代表者 上村 稔大 (UEMURA TOSHIHIRO)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号 : 30285332

研究成果の概要 (和文) : ランダム (不確実) な現象を解析する数学モデルの一つとして知られている確率過程, その中でもマルコフ過程について, 対称ディリクレ形式論と呼ばれる理論を用いて, それが特に, 時間に関して飛躍を持つマルコフ過程の構成に成功した, また, 対応するマルコフ過程の生成作用素を具体的に表示することに成功した. 更には, 大域的性質として知られる, 保存性や, 球からの脱出時間の平均等の導出に成功した.

研究成果の概要 (英文) : We succeeded to construct a stochastic process, namely, a jump-type Markov process, for which is known as a mathematical model of “unknown phenomena”, by using a symmetric Dirichlet form theory. Moreover an exact form of the infinitesimal generator is given and some global path properties also are obtained; the conservativeness and the mean of the exit time from a ball.

交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1, 100, 000	330, 000	1430, 000
2009 年度	700, 000	210, 000	910, 000
2010 年度	1, 500, 000	450, 000	1, 950, 000
年度			
年度			
総計	3, 300, 000	990, 000	4, 290, 000

研究分野 : 数学一般

科研費の分科・細目 : 数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード : ディリクレ形式, 飛躍型マルコフ過程, フェラー半群

1. 研究開始当初の背景

ランダムな現象を解析する数学モデルの一つとして確率過程論 (特にマルコフ過程) の研究において, 近年, 標本路が時間に関して不連続であるようなマルコフ過程の研究が急速に注目を浴びてきている. 実際, 数理ファイナンスにおいて重要な公式として知ら

れているブラック・ショールズ式が, 拡散過程の一種である幾何ブラウン運動を基礎の上に成立していることは周知の事実である.

ところが, 1998 年のロシア財政危機に端を発した世界的な株価の急激な下落, 2001 年の全米同時多発テロ, 所謂 9.11 のテロ直後の株価の急落など, 大地震など突然の自然災害による社会活動の一時停止による株価の急

落など、予測不可能な事件・事故などにより、それまでの“連続的変化”の破綻が相次いで発生している。それにより、標本路が連続であるという拡散過程によるモデル化の不適合性が指摘されて始めている。

近年、ますますそのような予測不可能な突然の不連続、それも大きな振れ幅の起きることが頻繁に起きることが予想される現代においては、積極的にその不連続な状況を土台としたモデルの構築を行う必要があると思われる。特に最近では、対称安定過程やその一般化の純飛躍型のマルコフ過程に対する確率解析の研究が精力的に行われるようになってきた。更には、数理物理学の分野では、ブラウン運動に代わり、より一般の飛躍を持つマルコフ過程の構成が要請されてきており、またそれを土台とする“不変”測度の存在を探求する研究が数多く行われて来ている。

2. 研究の目的

本研究は、確率過程の構成方法としてよく知られているディリクレ形式論を用いて、いろいろな飛躍型マルコフ過程の構成を試みようというものであった。具体的には、対称マルコフ過程に対応する生成作用素を書き下して、その生成作用素を通じて、マルコフ過程の構成や、その種々の性質を導出しようとするものである。特に、生成作用素が非局所作用素と呼ばれる微分積分作用素に対応する飛躍型マルコフ過程の構成を行う。またディリクレ形式を通じたマルコフ過程の構成には、出発点に関する多義性の問題も含んでおり、その解決も重要な課題としてあげておいた。そのために、生成作用素の有界摂動の手法を用いることにより、ある程度の範囲で解決可能であることがわかるので、その範囲がどの程度まで広げられるかについても考える必要がある。

また、マルコフ連鎖の自然な拡張として純飛躍型マルコフ過程がどのような推移確率の条件で実現できるかを考える予定である。その際には、どのような条件を近日集マルコフ連鎖に対して与えるかが本質的になってくる。拡散過程の離散版であるランダム・ウォークでは、このことは比較的自明に知られているが、純飛躍型マルコフ過程、あるいは飛躍型と連続型の合成である一般のマルコフ過程（これはジャンプ拡散過程と呼ばれている）を離散近似するとすると、ランダム・ウォークではもはや適切でないことが知られている。

3. 研究の方法

目的においても述べたが、本研究はディリクレ形式論を用いて飛躍型マルコフ過程の構成をレヴィー核と呼ばれる、マルコフ過程の飛躍率を表す測度を用いて行った。

一方で、ディリクレ形式により構成されるマルコフ過程の多義性の問題解決のために、生成作用素がフェラー半群を生成するための条件を合わせて求めた。それまでは、直接的にディリクレ形式に対応する生成作用素がフェラー半群に対応させるための条件として、レヴィー測度について、小さい飛躍率が一定であると言う条件で成功していたが、それを緩和することを試みた。一つの解決策として、フェラー半群の摂動論を用いて、接近する方法をとった。結果として、ディリクレ形式に対応する生成作用素がフェラー半群を生成することがわかり、それにより出発点に関する多義性の問題が解決された。

4. 研究成果

主な発表論文等に行った発表論文の成果内容について順番に簡単に解説していく。

(1) この論文では、コネチカット大学のバス教授、京都大学の熊谷教授と共に、ジャンプマルコフ過程を近似するマルコフ連鎖の推移確率に、適切な条件を与えて、それが極限のジャンプマルコフ過程に弱収束することを示した。ランダム・ウォークを近似列として採用して、その極限としては拡散過程が現れると言う結果はよく知られているが、それを一般化しただけではなく、自然にジャンプマルコフ過程が現れることを示した点で重要である。

(2) この論文では、次の (3) において述べた結果を詳細に再検討すると同時に、(3) では幾つか証明を省略したところがあったが、ここではそこで省いた結果の証明をも付け加えた。

(3) この論文は、摂動の手法を用いて、対称なディリクレ形式により構成されるマルコフ過程の出発点に関する多義性の問題を解決した論文であり、この問題に、摂動論が有用であることを示した初めての論文である。

(4) この論文では、ディリクレ形式を用いて構成した飛躍型マルコフ過程の生成作用素を具体的に表示することに成功した。更には、その表示を用いて、マルコフ過程の球からの脱出時間の平均を評価することに成功した。その手法としては、擬微分作用素の表像（シンボル）を用いて、以前示していたことが、今回はその議論を使わずに示すことが出来た点が重要である。

(5) この論文では、所謂レヴィー核が与えられたとき、それにより構成される非局所型作用素と、それとは独立にディリクレ形式とが構成されるが、この二者の関係性について、ある一定の関係性を持つことを示した論文である。すなわち、非局所型作用素から作られる平行場作用素を基礎の測度に関して積分して得られる量が、始めに与えたディリクレ形式と一致することがわかった。これは、拡散過程の場合と比較しても際だった結果である。

なお、発表論文があるわけではないが、本研究の最終年度にあたった、2010年8月29日より9月3日の間、関西大学において、『第四回確率解析とその応用』と題した国際研究会（4th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications）が開催された。筆者も世話人の一人として参加した。世界各国からのべ100人の参加者があり、研究テーマに沿った内容の研究発表も多数なされ、非常に充実した研究会となったことを付記しておきたいと思う。また、アジア各国からの若い研究者も多数参加し、今後の交流を約束して終了することが出来た。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計5件）

- (1) Richard F. Bass, Takashi Kumagai and Toshihiro Uemura, Convergence of symmetric Markov chains on Z^d , Probability Theory and Related Fields, 査読有り, vol. 148, 2010, 107-140
- (2) Yuichi Shiozawa and Toshihiro Uemura, Perturbation approach to the Feller property for non-local operators, 査読無し, RIMS Kokyuroku, vol. 1672, 2010, 131-142
- (3) Yuichi Shiozawa and Toshihiro Uemura, Stability of Feller property for non-local operators by bounded perturbations, Glasnik Matematikis, 査読有り, vol. 45, 2010, 155-172.
- (4) Toshihiro Uemura, On exit time from balls of jump-type symmetric Markov processes, Acta Mathematica Sinica, English Series, 査読有り, vol. 26,

2010, 185-192

- (5) Toshihiro Uemura, A remark on non-local operators with variable order, Osaka Journal of Mathematics, 査読有り, vol. 46, 2009, 503-514.

〔学会発表〕（計8件）

- (1) 上村稔大, Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi-Dirichlet forms, 確率論シンポジウム, 2010年12月22日, 京都大学
- (2) 塩沢裕一, 上村稔大, On integro-differential operators: Conservativeness and the Feller Property, 日本数学会, 秋季総合分科会, 統計分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学
- (3) 上村稔大, On the structure of the domain of a symmetric jump type Dirichlet form, マルコフ過程と確率解析, 2009年10月10日-12日, 岡山大学
- (4) Toshihiro Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, Fine properties of stochastic processes, 2009年11月30日, ビーレフェルド大学, ドイツ
- (5) Toshihiro Uemura, On the structure of the domain of a symmetric jump-type Dirichlet forms, Conference on Stochastic Differential Equations and Related Topics, 2009年8月24日-28日, マンチェスター大学, イギリス
- (6) Toshihiro Uemura, Convergence of symmetric diffusion processes with jumps, 3rd International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2009年7月13日-17日, 北京理工大学, 中国
- (7) Toshihiro Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, International Workshop on Probability and Its Applications, 2008年12月12日, 国立ソウル大学, 韓国
- (8) Toshihiro Uemura, Derivation

property and L^p -Liouville property
for non-local operator,
2nd International Conference on
Stochastic Analysis and Its
Applications, 2008年5月28日-
31日, 国立ソウル大学, 韓国

6. 研究組織

(1) 研究代表者

上村稔大 (Uemura Toshihiro)
関西大学・システム理工学部・教授
研究者番号 : 30285332

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし