

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 04 月 25 日現在

機関番号：32622

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540133

研究課題名（和文） グラフ上の酔歩の被覆時間とグラフのスペクトル幾何

研究課題名（英文） Analysis on the relation of the spectral structure of graphs to the cover times of random walks

研究代表者

樋口 雄介（HIGUCHI YUSUKE）

昭和大学・富士吉田教育部・講師

研究者番号：20286842

研究成果の概要（和文）：当該研究期間において、まずは有限グラフ上の酔歩の被覆時間（全ての頂点を訪問するのにかかる最短時間の期待値）に重きをおき、そこで spider graph というグラフの族に対してある一定の結果を得たものの、より一般のグラフに拡張するためには、スペクトルに関する新たな切り口が必要なことも判明した。ゆえにその後はグラフの幾何とスペクトル構造との相関解析に重心を移動し、そこでグラフ上の散乱問題を通して、隠れたスペクトルともいえる共鳴状態や量子波の散乱ともいえる量子ウォークに関するある程度の結果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：We first focused on a cover time of random walks on a finite graph, we could obtain some explicit formula for a special class of graphs, what are called “spider graphs.” However this analysis was very restricted. So we find we have to get more detailed information on spectra of discrete Laplacian in order to apply our method to a wider class of graphs. Thus we decided to study carefully the relation between spectra and geometry of graphs. We consequently obtain some results on spectral scattering problems, spectral resonance and the behaviour of quantum walks on graphs.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：離散スペクトル幾何・確率論

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：グラフ，酔歩，ラプラシアン，スペクトル幾何，被覆時間

## 1. 研究開始当初の背景

無限グラフのスペクトル幾何の研究において、従来から多く見られるアプローチは、連続な構造を持つリーマン多様体上で導入されている各種幾何学的不変量が離散構造を持つグラフに対しても定義できるか、さらにはその性質の類似がどこまで成立するか、

といったものが多かったと感じている。本研究代表者はこれまでに、さらに単なる離散化では見えない性質、たとえばグラフの曲率などをグラフの性質から導入しその正当化を示すなど、グラフ理論で取り上げられる「離散ならではの構造」により注目し、幾何学的手法や解析的・確率論的手法を絡めたアプロ

一歩を行ってきた。もちろん先に発展してきた多様体でのスペクトル幾何の道具は強力なものが多く、類似する性質がグラフで見出されるときは大いに有用であることも事実であるが、一方で離散構造故に連続の時に用いた戦略が使えないなどの理由の壁に阻まれると、全く歯が立たなくなることもまま見られることも事実である。したがって「連続からの離散類似」を意識しながらもとらわれ過ぎずに、離散独自の性質に注目した研究を継続することも重要と考え、その立場で新しい現象を解析することに主題をおこうと決めたものである。そこでの成果は現実のネットワーク構築などはもとより、離散モデルを用いる各分野に反映もしくは適切に移植されることが期待され、つまりはグラフ理論・組合せ論や微分幾何にとどまらず、確率論、関数方程式論、さらには理論物理や情報工学の各分野の劇的な研究発展に貢献できるものと考えている。

なお有限グラフ上の酔歩が全頂点に1度は訪れたことになるまでの最短時間、つまり、「有限グラフ上の酔歩の被覆時間」のグラフの幾何での制御を試みようとした当該研究の背景には、酔歩の被覆時間に関して旧来より各種の研究があるものの、想像以上に特徴付けが難しいことを示唆する結果しか見当たらなかったということと、その当時に発表された Ohwa & Shirai によって得られた「被覆時間をある種のスペクトルで表現する」という結果に刺激され、申請者の遂行する離散スペクトル幾何へのアプローチが活かされると確信したことがある。当時はまだ被覆時間の研究のとり組み始めたばかりであったが、例えば、連結度、サイクルや全域木の分布、因子の存在などのグラフ独自の性質が、被覆時間を制御しているとう感触を得ていた。そこでまず手掛りとして、一般の木(サイクルを持たないグラフ)に関して、その葉(次数1の頂点)の数や分布、内点の次数分布などの被覆時間の影響を調べ、さらには、一般のグラフに対して、そこに内在する全域木の性質などから被覆時間の制御を試みようとしたものである。なお応用的な背景としても、被覆時間が現在のネットワークの情報伝達の速さのある基準になりうるという感触があり、離散スペクトル幾何を通して、グラフの幾何構造と酔歩の被覆時間の関連がもし明白にされれば、ネットワーク構築の際、様々な条件下で最適な被覆時間を実現するような幾何的性質を持つように設計できるなど、設計においても多大な貢献が可能と考えたことがある。

## 2. 研究の目的

本研究の大きなテーマとしては、「グラフ

のスペクトル幾何」と「グラフ上の酔歩の被覆時間」の相関関係の解明、であるが、より具体的に述べると、グラフが持つ幾何構造とそのグラフ上の各種作用素のスペクトル構造との相関関係を述べることに同時に、効率の良いネットワークの構築に貢献があると思われる有限グラフ上の酔歩の被覆時間(酔歩が全頂点に1度は訪れたことになるまでの最小時間の期待値)をグラフの幾何もしくは各種作用素のスペクトル構造で制御することを主たる目的としていた。その際、連続の世界での先行結果からのいわゆる「連続からの離散類似物」は強力な道具になりうるものの、しばしば離散構造故に連続の時に用いられた戦略が全く使えないことがある。つまりは「連続からの離散類似物」の手法は意識しつつも、それでは見えない「離散ならではの構造」に注目しつつ、その中で上記の性質を制御するものを明らかにしてゆくことを目的としていた。また従来より懸案となっている「グラフの曲率」や「双曲的無限グラフのスペクトル」の決定および「Full Spectrum Conjecture」などの各種予想の完全解決も具体的な目的として視野にいった、さらなるグラフ上の離散スペクトル幾何の構造解析の発展も試みるものである。

## 3. 研究の方法

研究組織としては研究代表者ひとりであるので、基本としては手持ちや新たに入手した資料を用いて、グラフ理論・微分幾何・確率論のアイデアで目標を達成するものとならざるをえないという実情がある。もちろんひとりでは直接的な関係が見出せない性質や普遍的な技術の不足によって行き先を阻まれる可能性は否定できないため、新たなアイデアを獲得したり申請者の中で眠っているアイデアを呼びさますためにも、多様な分野に属する研究者との密なる、そして継続的な交流が不可欠と感じていた。それゆえ積極的に研究会や研究打合せに出向き、議論を交わすことを心掛け、それによって、新たな研究者と知りあうこともでき、直接本研究には反映されていないものの、今後の発展への可能性を感じる問題提起などを入手できたと思われる。さらにグラフ上の作用素のスペクトル構造の理論的体系の構築、および、有限グラフ上の酔歩の被覆時間と幾何構造の相関関係に関する理論構築のためには、まず多くの具体例を調べるのが重要だが、まるまるの手計算では実質困難な例がほとんどである。したがって計算機を用いた数値解析を行い、いわば「あたり」をつけてから手計算に戻るといった戦略も用いてきた。

## 4. 研究成果

### (1)「グラフの幾何とスペクトル構造」

有限グラフの極大可換被覆上のラプラス作用素のスペクトルに対して、その"固有値非存在性"や"充足性"は、グラフの持つ組合せ的性質などによって制御可能ということを解明してきたが、より広い族の有限グラフについて拡張可能という予想を解決すべくより離散的性質に注目しながら研究を遂行してきた。なお結果の一部である「2-因子を持つ有限グラフの極大可換被覆グラフ上のラプラス作用素のスペクトルには固有値が存在しない」というグラフ独自の幾何とスペクトル構造の特徴付けに関しては、野村氏との共同研究によるものであり、*European J. Combin.* で発表されている。この結果は、連続的類似物が想像できない離散独自の幾何的性質がスペクトル構造を支配したというものであり、研究代表者の独自性が発揮されたと自負するものである。もっとも、固有値を持たない無限グラフの完全なる特徴付けに関しては今後の課題として依然残っている。

### (2)「特殊な幾何構造をもつグラフにおける被覆時間の解析」

サイクルを持たないという特殊な構造を持つ木においてすら、未だ顕著な結果が存在しない被覆時間の解析に関して、白井・大輪両氏とともに、木の部分族 *spider graph* における酔歩の被覆時間および被覆完了時の到達頂点の分布に関する詳細な計算を、グラフの幾何構造とスペクトル構造に注目することによって成し遂げた。当結果は *Journal of Math-for-Industry* で発表されている。従来の被覆時間に関する結果は漸近的挙動を与えたものが多く、当結果のように *exact* な公式を与えたものは少ない。その意味でのインパクトは大変大きいと感じている。一方で、このような結果が出た背景には、*spider graph* という特殊なグラフの構造に依存するところが大きく、一般の木グラフ、さらには、一般のグラフに拡張するためには、より詳細なグラフのスペクトル幾何構造に注目する必要があることが明白となった。当該研究期間において、重心を被覆時間からより詳細なスペクトル幾何の解析に移動することになった重要な結果ともいえる。

### (3)「無限木における有限の台を持つポテンシャルによる摂動と発生固有値の解析」

木の上のラプラス作用素に対して、小栗栖氏らと1次元格子上での有限の台をもつポテンシャル、および安藤氏とは正則木上で多少限定されたポテンシャルという摂動を行ったときのスペクトルの変化を、離散独自の構造とスペクトル解析を併わせることで成功した。どちらも有限個の孤立固有値のみが生

じ、さらにその個数や強さ、出現鋭敏性と、ポテンシャルの強度との詳細な関係が得られた。当結果はそれぞれ、*Linear Multilinear Algebra* および *Linear Algebra Appl.* で発表されている。これらはポテンシャルによる一種の散乱問題を扱ったものともいえ、詳細な結果が *exact* に与えられたことは、奇跡的といえよう。とはいえ、そこにはサイクルを持たない無限木というグラフの特殊な幾何構造があり、より一般の無限グラフを対象とした結果を得るには、さらなる道具の充実を図る必要がある。当研究に多少なりとも影響を受け、後に白井氏らによる  $d$ -次元格子に  $\delta$  ポテンシャル（台が1頂点のみのポテンシャル）を考察した興味深い結果が *Journal of Math-for-Industry* に発表されたことを付記しておく。

### (4)「グラフ上の作用素の共鳴状態と量子ウォーク」

昨今脚光を浴びつつあるグラフ上の“量子ウォーク”，とくにグラフ上の酔歩から誘導されるものの挙動について注目し、いくつかの結果が得られた。ひとつは、グラフ上で波動函数を考えた量子グラフに関する散乱問題において、その散乱振幅のある種の極限として量子ウォークの発展作用素の表現に成功した。それによって量子ウォークはある意味の共鳴状態を意味するのでは、という感触が得られ、今後の方向性が示唆された。一方では、円分多項式という代数的性質を用いて、発展作用素が周期性をもつ有限グラフの族の決定に成功した。これらは今野、佐藤、瀬川各氏との共同研究に依るところが多く、その結果の一部は *Yokohama Math. J.* に発表されることが確定している。これらの結果の独自性は、研究代表者が継続してきたグラフ上の酔歩のスペクトル構造に関する蓄積が反映されたものであり、量子ウォークの研究者たちに新しい視点を与えたものだろうと自負するものである。

なお、一方で量子ウォークの発展作用素のスペクトルを眺めると、離散ラプラシアンに有限の台をもつポテンシャルを加えたときのグリーン函数を解析接続したときの特異点集合(レゾナンスとも呼ばれる)との類似点が多く見られる。残念ながら現在のところはまだ、一般のグラフに対してのレゾナンスの定式化は成功していないが、それは野村、小栗栖両氏との現在進行中の研究でもあり、これらの解析の成功は量子ウォークのある種の共鳴性を解決することとほぼ同等と想定している。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

〔雑誌論文〕(計 8 件)

1. Yu. HIGUCHI, N. KONNO, I. SATO and E. SEGAWA, Quantum graphs walk II: Quantum walks on graph coverings, Yokohama Math. J., 査読有, In press.

2. Yu. HIGUCHI, N. KONNO, I. SATO and E. SEGAWA, Quantum graphs walk I: mapping to quantum walks, Yokohama Math. J., 査読有, In press.

3. Yu. HIGUCHI, A. NAKAMOTO, K. OTA and T. SAKUMA, N-flips in even triangulations on the torus and Dehn twists preserving monodromies, Discrete Math., 査読有, 311, 2011, pp. 1128-1135.

4. Yu. HIGUCHI, T. MATSUMOTO and O. OGURISU, On the spectrum of a discrete Laplacian on  $\{\mathbb{Z}\}$  with finitely supported potential, Linear Multilinear Algebra, 査読有, 59, 2011, pp. 917-927.

5. Yu. HIGUCHI, T. OHWA and T. SHIRAI, Exact computation for the cover times of certain classes of trees, Journal of Math-for-Industry, 査読有, 2(2010A-9), 2010, pp. 93-98.

6. K. ANDO and Yu. HIGUCHI, On the spectrum of Schroedinger operators with a finitely supported potential on the  $d$ -regular tree, Linear Algebra Appl., 査読有, 431, 2009, pp. 1940-1951.

7. Yu. HIGUCHI and Y. NOMURA, Spectral structure of the Laplacian on a covering graph, European J. Combin., 査読有, 30, 2009, pp. 570-585.

8. Yu. HIGUCHI and Y. NOMURA, Non-separating 2-factor of an even regular graph, Discrete Math., 査読有, 308, 2008, pp. 5538-5547.

〔学会発表〕(計 17 件)

1. 樋口雄介; Scattering matrices of graphs and related topics, 離散数理解セミナー, 2013年02月07日, 山形大学(山形県)

2. 樋口雄介; グラフ上の散乱行列とその周辺, 金沢大学理学部数理解話会, 2012年11月20日, 金沢大学(石川県)

3. 樋口雄介; 量子ウォークが周期をもつ有限グラフのいくつかの例, RIMS 共同研究「量子ウォークとその周辺」, 2012年08月24日, RIMS(京都府)

4. 樋口雄介; グラフの散乱行列のその後と発展, 離散数学とその応用研究集会 2012, 2012年08月10日, 茨城大学(茨城県)

5. 樋口雄介; evolution operator の周期性, 離散数学セミナー in 小山 2012, 2012年08月08日, 小山工高専(栃木県).

6. 樋口雄介; グラフの幾何とスペクトルに関する諸問題, RIMS 共同研究「デザイン, 符号, グラフおよびその周辺」, 2012年07月17日, RIMS(京都府)

7. 樋口雄介; 散乱行列とその周辺, CMRU 研究会「量子確率論と量子ウォーク」, 2012年07月05日, 東北大学(宮城県)

8. 樋口雄介; Some remarks on a combinatorial scattering matrix of a graph, 離散数理解セミナー, 2012年01月18日, 山形大学(山形県).

9. 樋口雄介; The number of spectral bounds for discrete Laplacians on crystal lattices, RIMS 研究集会「スペクトル散乱理論とその周辺」, 2011年12月14日, RIMS(京都府).

10. 樋口雄介; The number of spectral bounds for discrete Laplacians on crystal lattices, 離散数理解セミナー, 2011年06月27日, 山形大学(山形県).

11. 樋口雄介; Spectral structure of the Laplacian on a covering graph, Crest セミナー / 応用数学連携フォーラム第16回ワークショップ, 2011年01月21日, 東北大学(宮城県).

12. 樋口雄介; Metal-Insulator-Transition for Maximal Abel Cover Graphs, 第22回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2010年11月13日, 横浜国立大学(神奈川県).

13. 樋口雄介; Metal-Insulator-Transition for Maximal Abel Cover Graphs, 離散数学セミナー in 小山, 2010年11月23日, 小山工高専(栃木県).

14. 樋口雄介; Metal-Insulator-Transition for crystal lattices, 研究集会「数理解析

の諸相」, 2010年08月10日, 山形大学(山形県).

15. 樋口雄介; 双曲的無限グラフのスペクトルを巡る話題, 研究会「多様体上での微分方程式」, 2009年10月29日, 富山・呉羽ハイツ(富山県).

16. 樋口雄介; 周期構造を持つグラフにおける摂動された離散ラプラス作用素のスペクトル, 応用数学合同研究集会 離散系・解析系合同セッション, 2008年12月16日, 龍谷大学(滋賀県).

17. 安藤和典, 樋口雄介; 有限個のポテンシャルを伴う正則木上のシュレディンガー作用素のスペクトル, 日本数学会秋季総合分科会 関数解析学分会, 2008年09月26日, 東京工業大学(東京都).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

樋口 雄介 (HIGUCHI YUSUKE)

昭和大学・富士吉田教育部・講師

研究者番号: 20286842

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし