

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540134

研究課題名(和文) Chaitin の停止確率  $\Omega$  の一般化がもたらす量子測定に対する不完全性定理の研究

研究課題名(英文)

Research on Gödel's incompleteness theorems for quantum measurements based on a generalization of Chaitin's halting probability  $\Omega$ 

研究代表者

只木 孝太郎 (TADAKI KOHTARO)

中央大学・研究開発機構・機構准教授

研究者番号：70407881

研究成果の概要(和文)：私は、Chaitin らによって創始されたアルゴリズム的情報理論を拡張して、それを量子力学系の測定理論に適用し、量子測定に対する Gödel の不完全性定理を導出しようと試みている。本研究課題は、この全体構想の一環であり、平成19年度後半に私が創始した新しい学問分野であるアルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈を徹底的に理解することが、本研究課題の具体的な目的である。

研究成果の概要(英文)：We try to derive Gödel's incompleteness theorems for quantum measurements by generalizing algorithmic information theory and then applying it to the theory of quantum measurements. This research project is part of an effort to accomplish the ultimate goal, and is aimed to understand completely a new research object, called the statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory, which was introduced by us in 2007.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：アルゴリズム的情報理論

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：Chaitin の  $\Omega$ ，ランダムネス，アルゴリズム的情報理論，統計力学，情報理論，不完全性定理，量子論基礎，不動点定理

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初の背景として、アルゴリズム的情報理論の概略を述べ、量子測定について復習をする。そして、両者を結び付ける私の過去の研究について説明したのち、本研究の全体構想と私の最終目的について述べる。更に、本研究の着想に至った経緯について述べる。

[アルゴリズム的情報理論の概略]

有限 2 進列  $s$  の Kolmogorov complexity  $H(s)$  は、ある種の万能チューリング機械である universal prefix-free machine  $U$  に  $s$  を出力させる入力のうちで、最小のもの長さとして定義される。この定義から  $H(s)$  は、 $s$  のランダムな部分の大きさを表すと考えることができる。 $H(s)$  のこの定義を出発点とする理論は、アルゴリズム的情報理論(algorithmic information theory)と呼ばれ

る。しかしながら、アルゴリズムの情報理論は単に情報圧縮の一般論を取り扱う理論にとどまらない。それはむしろ、数学的真理が持つ構造についての考察を可能にする理論である。アルゴリズムの情報理論のそのような理論展開で決定的な役割を果たすのが、Chaitinが導入した停止確率  $\Omega$  である。 $\Omega$  は実数であり、U が停止する確率として定義されるが、その2進展開は Martin-Löf ランダムであることが Chaitin により示されている。そして、Chaitin は  $\Omega$  のランダムな性質を指数型ディオファントス方程式  $L=R$  にコードした。ここで、L と R は和・積・冪の演算からなり、方程式  $L=R$  は全く初等的なものにも拘わらず、その解集合の或る性質は完全にランダムなものになる。この方程式を利用して、Chaitin は更に、Gödel の第一不完全性定理の定量化版を導いた。

#### [量子測定の復習]

任意の量子力学的物理系において、量子測定の測定結果の統計は、POVM (Positive Operator-Valued Measure) という数学的对象で記述される。POVM は、確率測度の概念を作用素へ拡張したものである。

#### [上記2者を結びつける私の研究]

私は、次の論文[1]で、アルゴリズムの情報理論の量子力学系への適用を目指し、Chaitin の停止確率  $\Omega$  を量子力学系の POVM  $\Omega_q$  に一般化した。

[1] Kohtaro Tadaki, An extension of Chaitin's halting probability  $\Omega$  to a measurement operator in an infinite dimensional quantum system, Mathematical Logic Quarterly, 査読有, 52, 2006, 419-438

[本研究の全体構想、そして私の最終目標：量子力学におけるランダム性の由来の理解]

私の目標は、上述の Chaitin によるアルゴリズムの情報理論の理論展開を、量子力学上に焼き直し、量子力学、特に量子測定についての真理に関して、或る種の不完全性定理を導くことである。その過程では、論文[1]で私が行った  $\Omega$  の POVM への一般化が、決定的な役割を果たす。

その過程は、より具体的には次のような展開で進むのではないかと予想している。まず、本来  $\Omega$  に基づいて構成された方程式  $L=R$  を、 $\Omega_q$  に対して修正・一般化することにより、量子測定に関係する何らかの方程式  $L_q=R_q$  を導く。そしてこの方程式に基づいて、量子測定に関する何らかの定量的な不完全性定理を導くのである。

ひょっとすると、この不完全性定理は量子

力学の確率解釈に深く関わるものになるかもしれない。Chaitin は、 $L=R$  のランダム性や、関連する定量化版 Gödel の第一不完全性定理の結果を、Limits of Mathematics と呼んでいるが、本研究の先には Limits of Quantum Mechanics があるかもしれないのである。量子力学は確率的な予測しかできず不完全な理論だと言われることがあるが、本研究により、その不完全さは必然的なものなのだと理由付けが出来るかもしれないのである。

#### [着想に至った経緯]

私は論文[1]の研究で、 $\Omega$  を無限次元量子系の POVM  $\Omega_q$  に拡張した。この拡張の研究が一段落し、アルゴリズムの情報理論の理論展開全体を鑑みた時、私は、Kolmogorov complexity  $H(s)$ 、並びに Chaitin の  $\Omega$  の量子版構築においては、かなりの成功を収めたことを認識した。そして、当然の帰結として、アルゴリズムの情報理論の理論展開全体を、対応する量子版で再構築しよう、という着想に至ったのである。即ち、私は、量子測定に関わる何らかの定量的な Gödel の不完全性定理を導こう、とひらめいたのである。

#### 2. 研究の目的

以上のように、量子測定理論に直結した、アルゴリズムの情報理論の量子版の構築が、私の研究の最終目標である。

一方、本研究課題の目的は、この目標の“本丸”である定量的な Gödel の不完全性定理の量子版構築に向けて、確固たる礎を築くことである。上記最終目標に向けての重要なステップが、指数型ディオファントス方程式  $L=R$  の量子版の構築であることは明らかであり、本研究課題では、そのあるべき姿を明らかにする。即ち、指数型ディオファントス方程式  $L=R$  をどのような方程式  $L_q=R_q$  に置き換えればよいか、検討と見極めを行い、最終目標に向けての今後の研究の方針を定めるのが、本研究課題の目的である。

具体的には、この目的遂行のため、本研究課題では、平成19年度後半以降、私の研究により著しく進展したアルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈の結果を大段的に活用して研究を推進する。この統計力学的解釈は、Chaitin の  $\Omega$  に秘められたランダムネスに関する様々な特性を明らかにするものである。特に、大変重要なことであるが、この統計力学的解釈を実際の物理系で実現することは、量子測定に関する Gödel の不完全性定理を導出したことと同じになるのである。従って、本研究課題では、実際の物理系での実現を達成するために、アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈を徹底的に理解することを目標に、研究を推進する。

### 3. 研究の方法

本研究は、計算機実験などが通用しない、純粹に理論的な考察のみから成る研究である。従って、研究推進者である私が、如何に効率良く関連情報を収集し、本研究の着想を如何に拡充し、そして、アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈という新しい学問分野を如何に豊かなものにして行くかが、本研究成功の鍵となる。

そのため、研究期間中は、関連する国際会議・国内会議に参加し、発表される様々な研究の聴講や、他研究者との意見交換を通じて、本研究の成就に繋がり得る情報収集を行った。具体的には、以下の国際会議・国内会議に参加し、発表を行った：

[国際会議] CiE 2008, CCR08, ISIT 2008, ALC 10, LFCS' 09, ALC2009, CCR09, Mathematical Aspects of Generalized Entropies and their Applications, CiE 2009, MFCS 2009, Physics and Computation 2009, FICS 2009, ITW 2009, Proof Theory 2009, LCR10, ISIT 2010, UC 2010, ITW 2010 Dublin, CCA-CCR 2011, Workshop on Proof Theory and Computability Theory など

[国内会議] 2008 年度夏の LA シンポジウム, SLACS25, RIMS 共同研究：証明論と論理・計算の構造, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会, SITA2008, 2008 年数学基礎論若手の会, 研究集会：エルゴード理論とその周辺, 2008 年度確率論シンポジウム, 2008 年度冬の LA シンポジウム, 日本数学会 2009 年度年会, 仙台ロジックセミナー, 日本数学会 2009 年度秋季総合分科会, SITA2009, 2009 年度確率論シンポジウム, 2009 年度冬の LA シンポジウム, 日本数学会 2010 年度年会, 2010 年度夏の LA シンポジウム, 研究集会：形式的体系と計算理論, SITA2010, 平成 22 年度確率論シンポジウム, 日本数学会 2011 年度年会 (東北地方太平洋沖地震により開催が中止され、アブストラクト集での発表) など

また、2009 年 3 月には、ニュージーランド・オークランド大学のコンピュータサイエンス学科の Cristian S. Calude 教授により、Visiting Honorary Researcher として招聘され、オークランド大学に一週間ほど滞在し、本研究課題に関する共同研究を進め、オークランド大学で 2 件の講演を行った。その後、Calude 教授とは本研究課題に関する研究交流を深め、2010 年 6 月からは、同大の Centre for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science の External Researcher にも就任し、Calude 教授と密接にコンタクトを取りながら、本研究を推進した。

他方、私が勤務する中央大学研究開発機構の日常の研究活動においては、必要となる様々な文献に目を通し、本研究の着想を育み、

本研究の達成を目指した。

### 4. 研究成果

私は、上述の理由により、アルゴリズムの情報理論の統計力学的解釈（以下、“統計力学的解釈”と略す）を徹底的に理解することを目的として研究を進め、主な業績として、以下の研究成果を得た。

(1) 統計力学的解釈で現れる熱力学的量のランダムネスに関する性質を調べた。この量は、Chaitin の停止確率  $\Omega$  の一般化となっているものであり、統計力学的解釈では、温度が熱力学的量の圧縮率の役割を果たすことを発見した。更に、温度自身の圧縮率も温度で表されることを発見し、その結果として、圧縮率に関する不動点定理を導いた。これら一連の成果は、国際会議 CiE 2008, ALC 10, LFCS' 09 で逐次発表した。

(2) これら熱力学的量と密接に関係する、universal probability のべき和について、ランダムネスに関する性質を調べ、国際会議 ISIT 2008 で発表した。

(3) 統計力学的解釈を深めるため、その起源である Chaitin の停止確率  $\Omega$  の性質について研究を進め、 $\Omega$  と停止問題との間の計算能力の差異について詳しく調べた。その結果、 $\Omega$  と停止問題の間には、計算可能性の理論の文脈でありながら、一方向性関数的な計算能力のギャップがあることを発見した。そして、この成果を国際会議 CiE 2009 で発表した。

(4) 統計力学的解釈で現れる熱力学的量のランダムネスに関する性質を、更に詳細に調べた。特に、圧縮率に関する不動点定理について研究を深めた。その一連の研究成果は、国際会議 ALC2009, LCR09, MFCS 2009, FICS 2009, ITW 2009 で逐次発表した。また、国際会議 Physics and Computation 2009 では招待講演を行った。更に、それらの成果は国際論文誌 Journal of Physics: Conference Series に掲載され、国際論文誌 Mathematical Structures in Computer Science に掲載が決定した。

(5) 国際会議 CiE 2009 で発表した。そして、統計力学的解釈の熱力学的量についても同様の性質があることを発見し、2009 年度冬の LA シンポジウム、2009 年度証明論研究集会、日本数学会で発表した。

(6) 統計力学的解釈では、温度  $T=1$  で相転移が起こる。計算可能性の理論の中で、計算量理論的な議論を行うことにより、この相転移の構造を解明した。その一連の研究成果は、国際会議 Proof Theory 2009 などでも発表した。そして、国際会議 LCR10 では招待講演を行った。

(7) Chaitin の  $\Omega$  は、ある種の万能チューリング機械である universal prefix-free

machine が停止する確率として定義される。Chaitin の  $\Omega$  の理解を深めるため、universal prefix-free machine のファイバーの構造を調べ、一連の研究成果を国際会議 ITW 2010 Dublin, CCA-CCR 2011 で逐次発表した。

(8) Calude らは、統計力学的解釈の温度  $T$  に依存する  $T$ -universal prefix-free machine の概念を導入した。私は、この  $T$ -universal prefix-free machine に基づいて定義される自己相似図形について、Hausdorff 次元の計算の一般論を構築した。そして、それに基づいて具体的な次元の計算を行った。その成果は国際会議 ISIT 2010 で発表した。

(9) 圧縮可能な有限  $2$  進列に基づいて定義される新しい Chaitin の  $\Omega$  を導入し、その性質を調べ、統計力学的解釈との関係を明らかにした。一連の成果は国際会議 UC 2010, CCA-CCR 2011 で発表した。

アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈は、平成 19 年度後半に、私が創始した全く新しい研究分野であり、海外から招待講演依頼を受けるなど、世界的に注目されている。

アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈は、数学における知の限界を追求するアルゴリズム的情報理論と、量子測定限界を追及する量子測定理論との統合という、全く新しい理論構築の可能性を拓くものである。本研究課題はその礎となるものであり、将来において、定量的な Gödel の不完全性定理の量子版の構築、即ち、量子測定に関する或る種の不完全性定理の導出、という量子力学に対する極めて重要な原理的な貢献をもたらすと考えられる。

この不完全性定理は、量子力学の確率解釈に深く関わるものになるかもしれず、本研究の成果により、「人類の自然・宇宙に対する科学的な認識が著しく深まる」という、人類にとって極めて意義深い結果が得られるかもしれないのである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 35 件)

- ① Kohtaro Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory III: Composite systems and fixed points, Mathematical Structures in Computer Science, 査読有, 掲載決定 (印刷中)
- ② Kohtaro Tadaki, Properties of fibers of optimal prefix-free machines, Abstract Booklet of the International Conferences on Computability &

Complexity in Analysis (CCA 2011) and Computability, Complexity & Randomness (CCR 2011), 査読有, 一, 2011, 25-25

- ③ Kohtaro Tadaki, A Chaitin  $\Omega$  number based on compressible strings, Abstract Booklet of the International Conferences on Computability & Complexity in Analysis (CCA 2011) and Computability, Complexity & Randomness (CCR 2011), 査読有, 一, 2011, 24-25
- ④ 只木孝太郎, アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈, 数学セミナー, 査読無, 2011 年 2 月号 (通巻 593 号), 2011, 27-33
- ⑤ Kohtaro Tadaki, Robustness of statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory, Proceedings of the 33rd Symposium on Information Theory and its Applications (SITA2010), 査読無, 一, 242-247
- ⑥ Kohtaro Tadaki, Phase transition between one-wayness and two-wayness, Proceedings of the 33rd Symposium on Information Theory and its Applications (SITA2010), 査読無, 一, 236-241
- ⑦ Kohtaro Tadaki, Properties of optimal prefix-free machines as instantaneous codes, Proceedings of the 2010 IEEE Information Theory Workshop (ITW 2010 Dublin), 査読有, 一, 2010, 一
- ⑧ Kohtaro Tadaki, A new representation of Chaitin  $\Omega$  number based on compressible strings, Proceedings of the 9th International Conference on Unconventional Computation (UC 2010), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 査読有, 6079, 2010, 127-139
- ⑨ Kohtaro Tadaki, The Hausdorff dimension of the halting self-similar sets of  $T$ -universal prefix-free machines, Proceedings of the 2010 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2010), 査読有, 一, 2010, 1287-1291
- ⑩ Kohtaro Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory: Total statistical mechanical interpretation based on physical argument, Proceedings of Kyoto RIMS workshop: "Mathematical Aspects of Generalized Entropies and their

- Applications,” Journal of Physics: Conference Series (JPCS), 査読有, 201, 2010, 012006 (10pp); <http://iopscience.iop.org/1742-6596/201/1/012006/>
- ⑪ Kohtaro Tadaki, Fixed points on partial randomness, Proceedings of the 6th Workshop on Fixed Points in Computer Science (FICS 2009), 査読有, —, 2009, 100-107; <http://cs.ioc.ee/fics09/fics09proc.pdf>
- ⑫ Kohtaro Tadaki, Partial randomness and dimension of recursively enumerable reals, Proceedings of the 34th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2009), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 査読有, 5734, 2009, 687-699
- ⑬ Kohtaro Tadaki, Chaitin  $\Omega$  numbers and halting problems, Proceedings of the Computability in Europe 2009 (CiE 2009), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 査読有, 5635, 2009, 447-456
- ⑭ Kohtaro Tadaki, Equivalent characterizations of partial randomness for a recursively enumerable real, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1635, 2009, 103-120
- ⑮ Kohtaro Tadaki, Fixed point theorems on partial randomness, Proceedings of the Symposium on Logical Foundations of Computer Science 2009 (LFCS'09), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 査読有, 5407, 2009, 422-440
- ⑯ Kohtaro Tadaki, The Tsallis entropy and the Shannon entropy of a universal probability, Proceedings of the 2008 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2008), 査読有, —, 2008, 2111-2115
- ⑰ Kohtaro Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory, Local Proceedings of the Computability in Europe 2008 (CiE 2008), 査読有, —, 2008, 425-434; <http://www.cs.swan.ac.uk/cie08/cie2008-local.pdf>
- [学会発表] (計 28 件)
- ① 只木孝太郎, アルゴリズム的情報理論の統計力学的解釈, 日本数学会 2011 年度年会 数学基礎論および歴史分科会特別講演, 2011 年 3 月 20 日, 早稲田大学理工学術院 <招待講演>
- ② Kohtaro Tadaki, A computational complexity-theoretic elaboration of weak truth-table reducibility, Workshop on Proof Theory and Computability Theory, 2011 年 2 月 22 日, Akiu Spa Hotel Iwanumaya, Sendai, Miyagi, Japan <招待講演>
- ③ Kohtaro Tadaki, One-wayness and two-wayness in algorithmic randomness, The 5th Conference on Logic, Computability and Randomness (LCR10), 2010 年 5 月 26 日, University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, USA <招待講演>
- ④ 只木孝太郎, Separating notions of partial randomness for thermodynamic quantities in algorithmic information theory, 2009 年度 確率論シンポジウム, 2009 年 12 月 16 日, 愛媛大学総合情報メディア センター メディアホール
- ⑤ Kohtaro Tadaki, A statistical mechanical interpretation of algorithmic information theory, Physics and Computation 2009, 2009 年 9 月 10 日, University of Azores, Ponta Delgada, Azores, Portugal <招待講演>
- ⑥ Kohtaro Tadaki, Equivalent characterizations of partial randomness for a recursively enumerable real, Conference on Computability, Complexity and Randomness (CCR08), 2008 年 5 月 20 日, Institute of Mathematical Science, Nanjing University, Nanjing, China
- [その他]  
ホームページ等  
<http://www2.odn.ne.jp/tadaki/>
6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
只木 孝太郎 (TADAKI KOHTARO)  
中央大学・研究開発機構・機構准教授  
研究者番号: 70407881