

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540135

研究課題名(和文) Bound graphとposet上のoperationの関連について

研究課題名(英文) On bound graphs and poset operations

研究代表者

土屋 守正 (TSUCHIYA MORIMASA)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：00188583

研究成果の概要(和文)：

本研究では、各種 bound graph を clique cover の観点から研究し、induced subgraph に付随する clique cover と poset の間の性質を利用して upper bound graph の様々なクラスを forbidden subgraph の立場から特徴付けた。

また、strict-double-bound number という概念を導入し、いくつかの graph のクラスの strict-double-bound number を決定した。

研究成果の概要(英文)：

We studied some kinds of bound graphs from the point of view of clique covers. Using properties of clique covers and posets, we characterized classes of upper bound graphs in terms of forbidden subgraphs.

And we introduced a concept of strict-double-bound numbers and gave strict-double-bound numbers of some families of graphs.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：離散数学

1. 研究開始当初の背景

Upper bound graph, double bound graph 等の bound graph は, poset の要素の上界間及び下界間の関係から構成されたグラフであり, J. E. Cohen [Co68] により, 生態系を研究するために導入されたグラフである.

本研究は, T. A. McKee [Mc03], F. R. McMorris [McZa82], 土屋 [Iw0g03, OgTs05] 等による bound graph の構造に関する研究の発展的場所に位置している. Induced subgraph に付随する clique cover による bound graph の構造解析は, D. D. Scott [Sc86] によりまずなされ, その後, L. Langley [LaMe97] 等により発展されたものである. これらは, interval upper bound graph 及び chordal upper bound graph 等の一部のグラフの族に対してのみ行われたものである. 本研究では, それらの研究成果を発展させ広く一般的な bound graph の構造を解析することを目指した.

参考文献

- [OgTs05] Kenjiro Ogawa and Morimasa Tsuchiya, Note on distances of posets whose double bound graphs are the same, *Utilitas Mathematica* **67** 153-160 (2005)
- [Iw0g03] Shin-ichi Iwai, Kenjiro Ogawa and Morimasa Tsuchiya, A note on bound graphs and clique covers, *The JCMCC* **44** 97-101 (2003).
- [Mc03] T. A. McKee, Chordal bipartite, strongly chordal, and strongly chordal bipartite graphs, *Discrete Mathematics* **260** 231-238 (2003).
- [LaMe97] L. Langley, S. K. Merz, J. R. Lundgren and C. W. Rasmussen, Posets with interval or chordal strict upper and lower bound graphs, *Congressus Numerantium* **125** 153-160 (1997).
- [Sc86] D. D. Scott, Posets with interval upper bound graphs, *Order* **3** 269-281 (1986).
- [McZa82] F. R. McMorris and T. Zaslavsky, Bound graphs of a partially ordered set, *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences* **7** 134-138 (1982).
- [Co68] J. E. Cohen, Interval graphs and

food webs: A finding and a problem, RAND Corporation Document 17696-PR, Santa Monica, CA (1968).

2. 研究の目的

各種の bound graph の構造に対する clique cover の観点からの研究が, これまでに数多く行われてきた. 本研究では, induced subgraph に付随する各種 clique cover 間の関係を poset 間の operation の観点から捉え, bound graph の構造を解明することを目的とした. また, poset operation と graph operation の関係を解析し, bound graph の構造をその部分構造上の operation の性質から捉えることも目的とした.

このことにより, induced subgraph に付随して存在する様々な clique cover 間の性質の解明が期待できる. その際に最適化理論からの解析も行い, 各種 bound graph の様々な族の性質を解明する.

また, strict upper bound graph 及び strict double bound graph の立場からの解析を行い, strict double bound graph の様々な族の性質を解明する.

3. 研究の方法

(1) これまでに明らかにされた bound graph の性質を用いて, upper bound graph 及び double bound graph の induced subgraph に付随する clique cover を poset 上の変換の観点から研究し, clique cover の持つ階層構造を利用して subgraph の構造を解明する.

(2) forbidden subgraph 等の graph の部分構造に付随する clique cover 間の関係を vertex-clique incidence matrix の観点から研究する.

(3) strict upper bound graph 及び strict double bound graph の立場からの解析を行う.

以上の研究手法の下で,

(a) : 原及び松本が, 様々な clique cover の部分構造をシミュレートし, poset 間の変換の特徴を捉える. その際, 幾何学的側面からのシミュレートも行う.

(b) : 土屋は, (1) 及び (2) の観点にしたがって, clique cover に対応する poset 上の変換の立場から subposet を捉え, 各種の bound graph の性質を解明する.

(c) : 松井は, 最適化理論の立場から

vertex-clique incidence matrix をシミュレートし、各種 clique cover を結び付ける graph 上の operation の性質の解析を行う。

(d) : 土屋は(a)~(c)の研究計画の進捗状況を把握し、研究員間の成果、意見の交流・統合を図る等の研究全般の統括を行い、研究目的の達成を図る。

4. 研究成果

Induced subgraph に付随する clique cover と poset 間の性質を利用して upper bound graph の様々なクラスを forbidden subgraph の立場から特徴付けることが出来た。

Upper bound graph G に対して、

- (1) G が chordal graph であるための必要十分条件は、 G が star n -gon ($n \geq 4$) を誘導部分グラフとして含まないことである。
- (2) G が split graph であるための必要十分条件は、 G が $2K_2$ を誘導部分グラフとして含まないことである。
- (3) G が P_4 -free であるための必要十分条件は、 G が bull graph を誘導部分グラフとして含まないことである。
- (4) G が threshold graph であるための必要十分条件は、 G が $2K_2$ と bull graph を誘導部分グラフとして含まないことである。

また、clique cover の階層構造に関係した upper bound graph のクラスに関する様々な性質を得ることが出来た。すなわち、

G を完全グラフではない connected split upper bound graph で、 $G=K+S$ と表せるグラフとする。ただし、 K は maximum clique、 S は non-empty independent set である。この時、 $DS_2(G)$ が split upper bound graph であるための必要十分条件は、 $\forall u, v \in S$ に対して、

- (1) $N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset$
- (2) $\exists x \in K ; x \notin N_G(u) \cup N_G(v)$

が成立することである。

Clique に対応する subposet への上界と下界の付加という poset 上の変換の立場より

strict upper bound graph や strict double bound graph を捉えようとした。Strict-double-bound number という概念を導入し、それらのグラフを定量的に捉えようとした。いくつかのグラフの strict-double-bound number に関する上界や下界を求めることが出来た。すなわち、

$$(1) \zeta(T) \leq \sum_{v \in IN(T)} \lceil 2\sqrt{\deg_T(v)} \rceil - 2(|IN(T)| - 1)$$

ここで、 T は non-trivial tree で

$IN(T) = \{ v \in V(T) ; \deg_T(v) \geq 2 \}$ である。

- (2) $\zeta(K_{1,n}) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil \quad (n \geq 1)$
- (3) $\zeta(P_n) = \lceil 2\sqrt{(n-1)} \rceil \quad (n \geq 2)$
- (4) $\zeta(C_n) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil \quad (n \geq 4)$
- (5) $\zeta(W_n) = \lceil 2\sqrt{(n-1)} \rceil \quad (n \geq 5)$

規則性の高い Ladder graph L_n や Spider graph S_n の strict-double-bound number に関する結果を得た。

- (1) $\zeta(S_n) = 2n \quad (n \geq 3)$
- (2) $\lceil 2\sqrt{(3n+2)} \rceil \leq \zeta(L_n) \leq 2n \quad (n \geq 4)$

また、完全グラフよりいくつかの辺を除いたあまり規則性のないグラフに関する strict-double-bound number に関する研究を行い、いくつかのグラフに関してその strict-double-bound number を決定した。

- (1) $\zeta(K_n - e) = 3 \quad (n \geq 3)$
- (2) $\zeta(K_n - E(P_3)) = 3 \quad (n \geq 4)$
- (3) $\zeta(K_n - E(2K_2)) = 4 \quad (n \geq 4)$

また、完全グラフ K_n ($n \geq 6$) から 3 本の辺を除くことにより得られる各種のグラフの strict-double-bound number $\zeta(G)$ が $3 \leq \zeta(G) \leq 5$ であることを示した。

- (1) $\zeta(K_n - E(K_3)) = 4 \quad (n \geq 4)$
- (2) $\zeta(K_n - E(P_4)) = 4 \quad (n \geq 4)$
- (3) $\zeta(K_n - E(K_{1,3})) = 3 \quad (n \geq 5)$
- (4) $\zeta(K_n - E(P_3 \cup K_2)) = 4 \quad (n \geq 5)$
- (5) $\zeta(K_n - E(3K_2)) = 5 \quad (n \geq 6)$

C_4 に関する clique cover の観点から、

induced subgraphとしての C_4 を捉え、対応するsubposetの特徴と C_4 のstrict-double-bound numberの持つ特徴を捉えた。また、poset operationの観点から K_n+G を捉えることにより、 K_n+G のstrict-double-bound numberが G のstrict-double-bound numberから求められることを示した。

これらの研究成果を元に、完全グラフから4本の辺を除くことにより得られる各種のグラフを、clique coverに基づいて分類した。以上の研究成果を利用して、完全グラフ K_n ($n \geq 8$)から4本の辺を除くことにより得られる各種のグラフのstrict-double-bound number $\zeta(G)$ が $3 \leq \zeta(G) \leq 6$ であることを示した。

これらの研究成果は、国際会議等の国内外の研究集会、専門分野の研究ジャーナルを通じて公表した。

また、これらの研究成果は、competition numberに関する研究の拡張であり、これまでに行ってきた clique cover に関する研究成果を用いることにより得られたものである。

今後は、上界および下界の大きさを考慮した場合の性質についての研究を clique cover と strict-double-bound number の観点からの研究へと研究を展開して行きたいと考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① K. Ogawa, S. Tgusari, M. Tsuchiya, On posets with double bound graphs which contain a star graphs with as an induced subgraphs, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 査読有, 34(2010), 1063-1075
- ② K. Ogawa, S. Tgusari, M. Tsuchiya, On distance two graphs of upper bound graphs, Discrete Mathematics, 査読有, 310(2010), 3276-3277
- ③ K. Ogawa, S. Tgusari, M. Tsuchiya, Note on upper bound graphs and forbidden subposets, Discrete Mathematics, 査読有, 309(2009), 3659-3663
- ④ K. Ogawa, S. Tgusari, M. Tsuchiya, On double bound graphs and forbidden subposets, Discrete Mathematics, 査読

有, 309(2009), 6353-6358

- ⑤ A. Kawamura, K. Ogawa, S. Tgusari, M. Tsuchiya, Note on upper bound graphs with forbidden subgraphs, Advances and Applications in Discrete Mathematics, 査読有, 1(2008), 215-226.
- ⑥ H. Era, K. Ogawa, M. Tsuchiya, A note on some kinds of hereditary bound graphs, Utilitas Mathematica, 査読有, 77(2008), 55-63.

[学会発表] (計14件)

- ① D. Kishida, K. Ogawa, S. Tagusari, M. Tsuchiya, Cycles and p-competition graphs of digraphs without loops and symmetry arcs, 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2010/12/10 (米国, Hawaii)
- ② K. Ogawa, S. Tagusari, M. Tsuchiya, On strict-DB-numbers of the Cartesian products of cycles, 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2010/12/10 (米国, Hawaii)
- ③ K. Kanada, K. Kushima, K. Ogawa S. Tagusari, M. Tsuchiya, Note on strict-double-bound-numbers of nearly complete graphs missing some edges, 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2010/12/7 (米国, Hawaii)
- ④ Y. Kidokoro, K. Ogawa, S. Tagusari, M. Tsuchiya, On p-competition graphs of digraphs without loops and symmetric arcs, 3rd Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2010/12/7 (米国, Hawaii)
- ⑤ K. Ogawa, R. Soejima, S. Tagusari, M. Tsuchiya, On strict-double-bound numbers, Combinatorics 2010, 2010/6/29 (イタリア, Verbania)
- ⑥ 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正, On strict DB-numbers of the Cartesian products of star graphs and paths, 日本数学会, 2010/3/24 (慶應義塾大学)
- ⑦ 小西翔大, 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正, On strict double bound numbers of

the Cartesian products of two cycles,
応用数学合同研究集会, 2009/12/19 (龍
谷大学)

- ⑧ 小西翔大, 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋
守正, On strict DB numbers, 日本数学
会, 2009/9/24 (大阪大学)
- ⑨ S.Konishi, K.Ogawa, S.Tagusari,
M.Tsuchiya, On strict double bound
graphs, 22nd British Combinatorial
Conference, 2009/7/6
(英国, St. Andrews)
- ⑩ 小西翔太, 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋
守正, Strict DB numberについて, 日本
数学会, 2009/3/26 (東京大学)
- ⑪ 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正,
Strict DB-graphについて, 日本数学,
2009/3/26 (東京大学)
- ⑫ 土屋守正, 小川健次郎, 田鎖聡史, Two
step graph のUB-graph性について, 日
本数学会, 2008/9/24 (東京工業大学)
- ⑬ 土屋守正, Upper bound 2-step graph に
ついて, 純粋数学及び応用数学としての
組合せ論・離散数学そしてその周辺ワー
クショップ, 2008/7/6 (電気通信大学)
- ⑭ M.Tsuchiya, On upper bound graphs with
graph operations, Combinatorics 2008,
2008/6/24 (Italy, Costermano)

[図書] (計1件)

- ① 恵羅博, 土屋守正, 産業図書, 増補改
訂版グラフ理論, 2010, 238

6. 研究組織

(1) 研究代表者

土屋 守正 (TSUCHIYA MORIMASA)
東海大学・理学部・教授
研究者番号: 00188583

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者:

原 正雄 (HARA MASAO)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号: 10238165

松井 泰子 (MATSUI YASUKO)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号: 10264582

松本 哲志 (MATSUMOTO SATOSHI)
東海大学・理学部・准教授
研究者番号: 30307235