

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 8日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540139

研究課題名（和文）

高次元の力学系に伴うペロンフロベニクス作用素と疑似乱数に関する研究

研究課題名（英文） Research on the spectrum of Perron-Frobenius operator and pseudo random number associated with higher dimensional dynamical system

研究代表者

森 真 (Mori Makoto)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：60092532

研究成果の概要（和文）：1次元では力学系に対応する Perron-Frobenius 作用素の essential spectrum radius はその最小値をとり、その値を簡単に得ることができるが、高次元の場合、力学系に対応する Perron-Frobenius 作用素の essential spectrum radius が最小値をとる場合は重要であると同時にそのような力学系を構築するのは容易ではない。その条件をみたし、さらに1以外に unessential な固有値をもたない力学系の構成に既約多項式を用いて成功し、それを用いて一般的な次元の low discrepancy 列を構成することに成功した。これにより、シミュレーションなどのコンピュータサイエンスへの応用および確率積分の数値計算などへの応用が開かれたと思う。同時に、unessential spectrum が最小値をとる力学系の構築の複雑さ、および、高次元の良好な疑似乱数の構築の困難さをも示したと言える。

研究成果の概要（英文）：In 1-dimensional cases, the essential spectrum radius of the Perron-Frobenius operator takes its minimum value, and it is easy to calculate it. However, in higher dimensional cases, it is important to consider the cases when its unessential spectrum radius takes its minimum value, and it is not easy to construct dynamical systems for which the essential spectrum radius attains its minimum value. We construct such a dynamical system which has no eigenvalue except 1 by using algebraic method. From this dynamical system, we construct low discrepancy sequences in any dimension. This makes a new progression to computer science such as simulation and numerical integral in stochastic integrals. On the other hand, this research suggests the difficulty of constructing dynamical system which has minimal essential spectrum radius, and the difficulty of constructing “good” random numbers in higher dimensional cases.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学，数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率論

1. 研究開始当初の背景

1次元の力学系のエルゴード性は対応する Perron-Frobenius 作用素のスペクトルによって、決定されることが知られている。具体的には固有値1の固有空間の次元は、力学系のエルゴード成分の個数を与え、固有値1の固有関数は不変確率の密度関数を与える。さらに、単位円上の固有値が1以外に存在しなければ、力学系は混合的であることがわかる。さらに、Perron-Frobenius 作用素の定義域を有界変動関数全体に制限することで、その essential spectrum radius が1よりちいさくなり、また1次元の場合は essential spectrum radius を決定することが容易にできる。園場合には絶対値で2番目に大きな固有値は力学系の decay rate of correlation を決定する。逆にいうと、一般に可積分関数全体を定義域とするもとの定義では、decay rate of correlation 自体を考えることができないこともわかるということである。一方で、Perron-Frobenius 作用素のスペクトルは力学的ゼータ関数の特異点と対応があることも知られている。具体的に述べれば、有界変動関数全体に制限した Perron-Frobenius 作用素の unessential spectrum の逆数はゼータ関数の特異点となる。さらに、力学系から作られる疑似乱数の性質は、力学系のエルゴード性により決定される。スペクトルの言葉で述べれば、unessential spectrum が simple な1のみであるとき、その力学系から構築される疑似乱数は low discrepancy, すなわち、性質の良い疑似乱数となる。

しかし、Perron-Frobenius 作用素は compact 作用素でないために、具体的にその固有値を求めることが困難であった。しかし、力学系を母関数に表現をし、さらにその母関数に対して再生方程式を構築することに森は成功した。このことを用いて、Perron-Frobenius 作用素の固有値、および、力学的ゼータ関数を決定することができた。さらに、力学系から作られる疑似乱数の discrepancy を決定することにも成功し、良好な疑似乱数を与えることができた。

2. 研究の目的

簡単に言えば、これまでの1次元の結果を高次元に拡張することが目的である。すなわち、高次元の場合の力学系のエルゴード的性質を対応する Perron-Frobenius 作用素のスペクトルを用いて研究することが目的である。形式的には、力学系のエルゴード的性質の決定は1次元の場合と高次元の場合とでは異なるものではない。しかし、1次元では容易に決定できた essential spectrum radius の

決定が、高次元においてはきわめて困難になるのが大きな違いである。そこで、まず essential spectrum radius の決定の方法を研究することが最初の目的である。しかし、一般論を直ちに導くのはあまりにも困難であるので、まず、essential spectrum radius の望ましい最小値は知られているので、この最小値を達成するような力学系の特徴づけを行うのが当面の目標となる。とくに、そのような力学系はこれまで知られていないので、それを具体的に構築することがまず目標となる。このような具体例の構築をつづけることで、essential spectrum radius がどのように決定されるかの糸口をつかむことが目標となる。

さらに、このスペクトルの研究を通して、力学系から作られる高次元の low discrepancy である疑似乱数を構成することも目標の一つである。これにより、シミュレーションなどコンピュータサイエンスへの応用への道を切り開くのが目標である。

3. 研究の方法

一般論の構築にはめどが立たないので、具体的な性質の良い高次元の力学系の構成を行うことで、essential spectrum radius の基本的な性質を調べる。実際、どのような力学系が essential spectrum radius を最小にするのかを考察する。完全に証明されたわけではないが、高次元の場合には、自然な連続な変換では、その essential spectrum radius は、最小値を達成することはないように思われる。そこで、irreducible polynomial を用いる方法で、単に連続な変換ではなく、これを代数的に“かき混ぜる”という手法をとることで、その essential spectrum radius が最小値をとる力学系の構築に成功した。今回の時間内では一般論を構築するにはいたらなかったが、このように巧妙に設計された力学系でなければ、essential spectrum radius は最小値をとらないであろうことが予想されることがわかった。これを用いると、low discrepancy な疑似乱数が構築可能となる。言い換えれば、高次元の良好な力学系は単純な力学系から構成されることはなく、緻密に設計された特殊な変換からのみ導かれるということがわかってきた。

4. 研究成果

irreducible polynomial を用いた代数的方法を用いて、一般の次元で essential spectrum radius が最小値を達成するような、きわめて良好な性質を持つ力学系の構成を行えた。この力学系はフラクタル構造をもち、そのような構造をもたない力学系は

essential spectrum radius の最小値を達成しえないことが示唆された、
また、この新しく構築した力学系を用いて low discrepancy な、すなわち、きわめて性質のよい疑似乱数の構成を行えた。これまで、高次元の良好な疑似乱数は限られた構成法しか知られていなかったが、新しい視点での構成を得て、確率積分などの計算への応用も開かれるであろう。一方で、この研究により、高次元の良好な力学系とは、連続であるとかいうような単純なものではなく、いうならば、フラクタル構造のような複雑な内面構造をもつものしかありえないであろうことがわかってきた。このことは同時に、高次元の良好な疑似乱数の構成の困難さを示すことにもなったと思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

全て査読有

1 Masaki Mori and Makoto Mori, Dynamical system generated by algebraic method and low discrepancy sequences, Monte Carlo Methods and Applications, vol.18 no4, 327-351, 2012 Dec.

2 Masaki Mori and Makoto Mori, New

Construction of Two Dimensional Low

Discrepancy Sequences (with Masaki Mori),

Proceedings of the Institute of Natural Sciences,

Nihon University 47,449--462, 2012

3 Makoto Mori, Low discrepancy sequences, 数理解析研究所講究録 1620, 204-210 (2009)

4 Makoto Mori, Spectra of Perron-Frobenius

operator and new construction of two dimensional

low discrepancy sequences, Monte Carlo Methods

and Applications, col. 14, 53-74(2008)

[学会発表] (計 16 件)

1 Makoto Mori, On asymptotic behavior of families of functions on 1--dimensional dynamical system, Information and Randomness, 2012年12月11日, Puerto Varas, Chile

2 森 真, 力学系のエルゴード性と疑似乱数, 函数解析学による一般化エントロピーの新

展開, 2012年11月14日, 京都大学数理解析研究所

3 Makoto Mori, A relation between ergodic theory and random numbers, Workshop for Quasi--Monte Carlo and Pseudo random number generation, 2012年6月12日, University of Tokyo

4 Makoto Mori, Dynamical system with fractal structure and low discrepancy sequences

(with Masaki Mori) 2011年12月28日, Beijing University

5 森 真, 有限体から作る力学系について (with 森 真樹), 日本数学会, 2011年3月20日, 早稲田大学

6 森 真, 高次元の疑似乱数の新しい構成 (with 森 真樹), Dynamics of Complex Systems, 2011年3月7日, 北海道大学

7 Makoto Mori, Dynamical systems generated by algebraic method and low discrepancy sequences (with Masaki Mori)}, Information and Randomness, 2010, 2010年12月11日, Pucon, Chile

8 Makoto Mori, Random numbers generated by Dynamical system, Colloquium in Rouen, 2010年1月28日, Rouen University

9 森 真, 力学系と疑似乱数, 計算による数理解析の展開, 2010年1月8日, 神戸大学

10 Makoto Mori, A strategy of constructing d-dimensional low discrepancy sequences, Measurable and Topological Dynamical Systems in Asia, 2009年6月19日, Ajou University (韓国)

11 Makoto Mori, Pseudo random sequences generated by dynamical systems, Numeration: Mathematics and Computer Science, 2009年3月24日, CIRM, (France)

12 Makoto Mori, Pseudo random numbers and ergodic theory, School of Information and Randomness 2008, 2008年12月16日, チリ大学

13 Makoto Mori, On random numbers generated by dynamical systems, Conference on Fractal Geometry and Ergodic Theory, 2008年11月2日, 北京科学技術大学

14 MakotoMori, Spectra of Perron-Frobenius operator and discrepancy of random numbers generated by dynamical system, Dynamics of complex systems 2008, 2008年9月3日, 北海道大学

15 Makoto Mori, Low discrepancy sequences, 確率数値解析に於ける諸問題の研究, 2008年7月8日, 京都大学数理解析研究所

16 Makoto Mori, Numerical Integration and ergodic theory, Lirmm, Montpellier, 2008年2月28日, France

[図書] (計2件)

- 1 森 真, 東京図書, 入門 確率解析とルベーク積分, 2012年6月, 236ページ
- 2 森 真, 水谷正大, 東京図書, 入門 力学系, 2009年5月, 294ページ

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~mori/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森 真 (MORI MAKOTO)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号: 60092532

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

