様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月２０日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号： 20540141
研究課題名（和文）非線形系研究の応用解析学としての展開

研究課題名（英文）Development of study of nonlinear system as applied analysis

研究代表者
西田　孝明（NISHIDA TAKAAKI）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70026110

研究成果の概要（和文）：力学系、非線形双曲型保存則、流体方程式系などを主な対象として、パターン形成､解の構造から進んで､分岐構造やその安定性等の解空間の大域的な構造の解析、計算機援用解析を行った。熱対流の Rayleigh-Benard 問題の解の大域的分岐構造、自由表面をもつ Benard-Marangoni 問題についてその分岐定理、２自由度の特別な力学系について対応する Hamilton-Jacobi 方程式の解の差分法による構成的存在証明を得た。

研究成果の概要（英文）：Main objects are Dynamical Systems, Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws and Fluid Dynamical Equations. After considering the pattern formations and the structure of solutions we proceed to study their global structure of the solution spaces such as bifurcation diagrams and their stability by analysis and computer assisted analysis. Global bifurcation diagrams for Rayleigh-Benard heat convection problems, bifurcation theorems for Benard-Marangoni heat convection problems and a constructive existence theorem by a finite difference method for the Hamilton-Jacobi equation corresponding to a special Hamiltonian with two degree of freedom are obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究代表者の専門分野：非線形微分・偏微分方程式系
科研費の分科・細目：数学一般　４１０３
キーワード：(1) 応用数学、(2) 非線形偏微分方程式系、(3) 力学系、(4) 熱対流問題、(5) パターン形成、(6) 解空間大域構造、(7) 計算機援用解析、(8) 計算機援用証明法

１．研究開始当初の背景

(1) Rayleigh-Benard 熱対流問題におけるパターン形成を調べるための解の分岐現象の解析的証明を整理し、解析的な取扱いの及ばない解の分岐曲線の追跡を計算機援用解析およびその計算機援用証明によって始めた

(2) 自由表面を持つ流体の運動における分岐現象の解析的取扱いを始めた。

(3) 力学系の Hamilton-Jacobi 方程式と対応する双曲型偏微分方程式の関係を滑らかな解と衝撃波を持つ解と力学系の準周期解と chaotic な解との関係として調べ始めた。

２．研究の目的：

数理科学に現れる諸問題は、主に非線形の常微分・偏微分方程式系の形で定式化される。それらの自然に現れ典型的な非線形系の数学的構造を解明することを目的とする。　即ち、解の定性的性質・漸近的性質、構造、それらの安定性を調べることから進んで、解全体の成す解空間の構造・構造安定性、その変化を自然なパラメーターに依存した形で解析したい。

（１）流体方程式系を主な対象として、それらに典型的な問題でありながら弱非線形理論・一次分岐理論などによる扱いを越えているため未解決である重要な問題を明確に定式化し、その非線形性と物理的に自然なパラメーターに着目して、解空間における定常解・周期解のみならず一般の解の時間的遷移過程を調べるための解空間の大域的な特異性・構造とその変化を解明する。

（２）力学系の Hamiltonian の解に対してその不変集合を与える Hamilton-Jacobi 方程式に同値な非線形双曲型偏微分方程式の解との関係を調べるために、後者の解を構成し、その滑らかな解と衝撃波を持つ解と力学系の準周期解と chaotic な解との関係の解明をめざす。

３．研究の方法

現在利用できる解析学・関数解析学・数値解析学の方法・理論を駆使し、発展させ、最高の成果を取入れるのはもちろんだが、それらの限界を見極め、計算機援用解析をも含む応用解析学としてはじめて可能とするために必要な方法と理論の構築を目指す。

（１）

解空間でのパラメーターによる解の分岐構造を調べることは、基本的な問題であり、分岐理論はその解析のための有力な方法である。しかしながら、それを具体的な問題へ応用するためには、単純分岐の場合でも証明の困難な条件が仮定されている。　即ち、自明な平衡解からの一次分岐問題の内の特別なものをのぞいて、一般の平衡解からの分岐問題において、さらに主目的である大域的に分岐を考察する場合には、分岐を考察する点（解空間での点、即ち、解）において線形化した偏微分方程式系のスペクトルに関する情報が必要である。　しかしながら、この線形系は一般には自己共役な作用素ではなく、このスペクトルの様子はもちろんのこと、この線形系自身もあらかじめ与えられたものではない。

何故なら、この点（解）自身も、自明解の場合を除いては、非線形系を解いて求めなければならないものであるから。

解析的及び計算機援用証明法として取組む。

（２）Moser 等によって考察された力学系の Hamiltonian を数値計算するとともに対応する非線形双曲型偏微分方程式の解を差分法で構成的に求め、得られた解における衝撃波の有無によって力学系の準周期解と chaotic な解との対応関係を解析的及び計算機援用解析として取組む。

４．研究成果

(1) 熱対流問題：水平な帯状領域にある流体を下から一様に熱するときの流体の運動の物理パラメーターに依存した解析。

上下の境界条件が stress-free の場合。空間３次元のパターン形成である六角形型や長方形型の解の存在証明が、計算機援用による証明として Rayleigh 数が小さい場合であるが、出来始めた。

空間２次元のロール型の解の計算機援用存在証明の（ Rayleigh 数が大きい）場合と比べて電子計算機の容量、計算速度などが現在のそれらの限界まで必要である。　空間２次元のロール型の分岐解と二次分岐解の存在証明を Rayleigh 数が臨界点からはなれたところでの計算機援用証明法としてまとめた。

(2) 同じ熱対流問題で、物理的により自然な上面が stress free で、下面が固定の境界条件の場合。ロール型、六角形型、混合型などのパターン形成とその分岐曲線の延長、これらの一次分岐点からの分岐曲線とははなれたところにある解曲線の存在などの分岐構造の解明が、Rayleigh 数が小さくない場合にも計算機援用解析として出来てきた。

(3) 上面が　自由表面であり表面張力が温度に依存する Benard-Marangoni 熱対流の定常分岐及び Hopf 分岐がおこっているという定理の解析的な証明が出来た。

流体は、 Oberbeck-Boussinesq 方程式に従うが、自由表面をもつために自由表面上で非線形の境界条件を満たさなければならず、その自由表面自身も求めなければならないために解析が困難で、分岐解析の無かった問題である。まず時間依存する領域を水平な固定領域に変換し、その領域上での問題に還元して、準線形偏微分方程式系が得られるが、複雑な大量の非線形項が系に現れる。分岐解析のためにその線形化方程式系が解

析半群を生成する事を示し、固有値問題を解析して、分岐が起るパラメーターの値（臨界 Rayleigh 数、Marangoni 数）を特定する。そこから定常分岐あるいは Hopf（周期解）分岐が起っている事を Lyapunov-Schmidt 分解を準線形系に対して適用した精密な解析を行い示した。ロール型、六角形型の定常パターンと時間周期的なパターンがパラメーターの値に応じて得られる。それらの元の時間に依存する系の解としての安定性、パラメーターの値を大きくした時の分岐図などは、自由表面のある問題として数値解析をするとしても今後の問題である。

(4) 力学系：Moser et al. (1999) により問題提起された 2 自由度の特別な Hamilton 力学系とその不変集合を記述する Hamilton-Jacobi 方程式(これは、周期境界条件の下で時間周期的外力を持つ Burgers 方程式と同値) を考察した。この周期的外力つきの Burgers 方程式の時間・空間での周期解が滑らかな場合（解の積分平均である助変数に依存する）は、この解は Kolmogorov-Arnold-Moser の定理による力学系の準周期解が載る不変多様体に対応し、周期解が滑らかでない（衝撃波が現れる）場合は、力学系の解の準周期性の崩れ(カオスなどの発生) に対応する。その周期解の構成的存在証明を Lax-Friedrichs の差分法を用いて、時間を無限大にした極限として求める方法と Newton 法との二つの方法で行い、その安定性を示した。後者の Newton 法による周期解の存在証明は、非線形偏微分方程式への取組みであり特記されてよい。　周期解が滑らかでない場合にも（即ち、カオス的な多くの解の中にある）不変集合である Aubry-Mather 集合の差分法による構成を計算機によって行えた。多くの衝撃波が現れる場合があり、計算は極めて微妙である。

(5) 小さい圧縮性を考慮した時間変化のある偏微分方程式を導入し、その時間無限大の極限として非圧縮性の定常 Navier-Stokes 方程式の解を求める方法が、 Chorin によってその差分法とともに提唱されている。　この方程式の解が、時間無限大で定常解に収束すれば、Navier-Stokes 方程式の定常解に（非自明な解に対しても）収束していることがわかる。　その少しファンシーな差分法を通常の中心差分法と前進差分法で置き換えると簡明になる。これを用いて Rayleigh-Benard 問題で、上面 stress-free で下面 fixed の境界条件をもつ場合の解のパターンとして大域的に求められていたロール型の解、六角形型の解、混合型の解などの安定性を調べることができた。
その方法の理論的正当性を証明したものは、(もちろん非自明な解への収束に関して）現存しないと思われ、今後の問題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計５件）

(1) T. Nishida and Y. Teramoto, Bifurcation theorems for the model system of Benard-Marangoni convection, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 査読有, Vol.11, 2009, pp.383-406
(2) M. Kim, M. T. Nakao, Y. Watanabe, T. Nishida, A numerical verification method of bifurcating solutions for 3-dimensional Rayleigh-Benard problems, Numerische Mathematik, 査読有, Vol.111, 2009, pp.389-406
(3) T. Nishida and Y. Teramoto, Pattern formations in heat convection problems, Chinese Annals of Mathematics, Ser. B, 査読有, Vol.30, 2009, pp.769-784
(4) M. T. Nakao, Y. Watanabe, N. Yamamoto, T. Nishida and M. Kim, Computer assisted proofs of bifurcating solutions for nonlinear heat convection problems, Journal of Scientific Computing, 査読有, Vol.10, 2008, pp.1-18
(5) T. Nishida and Kohei Soga, Periodic solutions of the forced Burgers equation, RIMS Kokyuroku (Kyoto University), 査読無, No.1631, 2008,pp.147-159

〔学会発表〕（計６件）
いづれも招待講演

(1) T. Nishida, Pattern formations of heat convection problems, German-Japan joint spring school at Technical University of Darmstadt, Darmstadt, Germany, 2011, February 28-March 3, organized by M. Hieber (Technical University of Darmstadt)
(2) T. Nishida, Heat convection problems of compressible fluids, International Conference on Nonlinear Partial

Differential Equations：Mathematical Theory, Computation, andApplications, 2010, November 29-December 3, Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore, organized by Shih-Hsien Yu (National University of Singapore), In honor of 65th birthday of Tai-Ping Liu (Stanford University and Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan)

(3) T. Nishida, Pattern formations of Benard-Marangoni heat convection problems, Fluid dynamics, Analysis, and Numerics, A conference in honor of J. Thomas Beale (Duke University), 2010, June 28-30, Duke University, Durham, North Carolina, USA, Organized by T. Witelski (Duke Univerity)

(4) T. Nishida and Y. Teramoto, Pattern Formations in Heat Convection Problems, Mathematical Physics and PDEs, 2009, September 11, Levico, Italia, Organized by H. da Veiga (University of Pisa)

(5) T. Nishida Pattern Formations in Heat Convection Problems, International Conference on Contemporary Applied Mathematics, In honor of 60th birthday of Andrew Majda (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University) 2009, January 23, 復旦大学、上海, organized by T. Li (Fudan University)

(6) T. Nishida, Pattern Formations in Heat Convection Problems, Parabolic and Navier-Stokes Equations, In honor of V. A. Solonnikov, 2008, September 4, Bedlewo, Poland, organized by W. Zajaczkowski

６．研究組織

(1)研究代表者

西田 孝明（NISHIDA TAKAAKI）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：70026110

(4)研究協力者

寺本 恵昭（TERAMOTO YOSHIAKI）
摂南大学・工学部・教授
研究者番号：40237011