

機関番号：34304

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540143

研究課題名(和文) 計算可能性問題における極限再帰関数の役割の多角的研究

研究課題名(英文) Multilateral research on the role of limiting recursive functions in the computability problem

研究代表者

八杉 満利子 (YASUGI MARIKO)

京都産業大学・名誉教授

研究者番号：90022277

研究成果の概要(和文)：計算を無限に続ける過程のどこかで正しい値が決定される関数を極限再帰関数と呼ぶ。数学を“計算”という観点から見ると、極限再帰関数の理論が重要な働きをする。それを数学における計算可能性理論に応用し、また、この方法とユークリッド不連続関数を連続にする一様位相の方法との比較を行った。さらに、理論の一部を計算機に実装する工夫も行った。

研究成果の概要(英文)：A function whose value is obtained somewhere in the course of an infinite process of computations is called a limiting recursive function. The theory of limiting recursive functions plays an important role when one observes mathematics from the standpoint of “computation”. We have applied it to the computability theory in mathematics, and compared this method with the method of uniform topology, in which a Euclidean discontinuous function turns continuous. We have further devised how to implement a part of this theory on the computer.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：計算可能数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：極限再帰関数、実効的一様位相、計算可能確率分布、Fine 計算可能関数、数学基礎論

## 1. 研究開始当初の背景

本研究の主題は数学のなかの計算可能性問題における“極限再帰関数”の役割の多角的研究である。極限再帰関数とは、再帰関数の極限值(それが存在するときに)を値とする関数である。数学における計算可能性問題の

ために当研究グループは、不連続関数の収束率・連続率の評価に極限再帰関数を認める方法と、関数の連続化による“実効的”一様位相による方法を開発した。そのなかで、極限再帰関数が計算可能性問題のみならず数学

の発展史においても重要な役割を担ってきたことが分かり、当研究では極限再帰性に焦点を当てた。

当研究開始までに我々は上記の各手法における計算可能数学の理論を発展させ、二理論における関数値の“列計算可能性”のある自然な条件のもとでの同値性を具体例で示した。また、極限再帰的数学の形式化・その計算機上の実行の研究にも着手していた。

他に関数解析的手法や計算可能なコード理論による計算可能解析学なども発展しているが、我々の手法は（極限）再帰関数の初歩的知識以外には通常の数学の知識・技術で数学における計算可能性問題の研究ができる、という大きな特長がある。

## 2. 研究の目的

対象領域は基本的に実数あるいは有限次元ユークリッド空間である。

(1) 不連続実数関数の計算可能性問題における極限再帰関数の機能の特徴付け、たとえば、極限再帰関数による“L-列計算可能”な関数族の数学的特徴づけ。

(2) Fine 位相空間（実効的一様位相空間）における解析学の展開。

(3) 無限個の縮小写像によるフラクタル図形など複雑な集合の性質、関数解析の諸定理、などの極限再帰関数による特徴付け。

(4) 極限再帰的計算可能数学の形式的体系構築とその計算機上の実現とそのゲーム意味論による解釈。

(5) 数学における極限再帰性の応用例の分析。

## 3. 研究の方法

(1) （不連続）関数  $f$  を連続化するように実数体に一様位相  $U$  を導入し、 $f$  の計算可能性問題を一様位相上の連続関数としての計算

可能性問題として定義できる。 $f$  の“列計算可能性”について極限再帰関数による L-列計算可能性と U-列計算可能性の同値性を一般的で自然な条件下で示す。

(2) Fine 位相空間における積分論の実効化、および(1)の同値性の具体例の提示。

(3) 無限個の縮小写像によるフラクタルの次元等についての計算可能性を調べる。

(4) 構成的数学の体系に極限作用素を加えて得られる極限計算可能数学の理論体系の整備、その実装プログラムの改良を行う。また、ゲーム意味論による解釈をする。

(5) たとえば、ヒルベルトの有限基底定理の第一証明における極限再帰的な手続きに関する帰納法の論理的構造の分析・整備をする。

不連続関数の連続化は連続体の位相を変えることによって可能であり、それは一様位相となる。それが“実効的一様位相”（計算可能性構造をもつ）になるとき、もとの関数の連続関数としての計算可能性を扱える。（ある自然な条件のもとで）関数が極限再帰の意味で列計算可能であることと一様位相において列計算可能であることの同値性により、どちらを採用してもよいことになる。その事実を利用して数学における極限再帰関数の役割を一様位相で置き換えることができる。この手法により数学の種々な計算可能性構造を解明できる。とくに Fine 位相はその典型であり、Fine 解析は数学として興味深い理論として展開されている。その計算可能版は暗示的に極限再帰関数の重要な役割を示す。

## 4. 研究成果

研究目的および方法に沿って以下の成果をあげた。

(1) 極限再帰性と実効的一様位相という、互いに異質な理論における不連

続関数の”列計算可能性”の同等性に関する一般論を展開し、また、極限再帰性の”計算認識”の基盤として“コンパクト性”を提案した。

- (2) Fine 空間上の数学の実効化としてまず Fine 位相における種々な収束の定義とそれらの実効化の理論を展開した。次に 2 次元 Fine-位相における積分論および Walsh-Fourier 級数の収束に関する諸定理の実効化に成功した。これらはユークリッド空間においては極限再帰関数によって支配される列計算可能性理論による数学の Fine 位相における翻訳といえる。有界密度関数を媒介として確率分布の計算可能性と確率分布関数の列計算可能性の同値性を示し、有界密度関数をもたない分布については Fine 計算可能な分布関数との同値性を示した。
- (3) Fine-位相における計算可能関数のグラフが無限個の縮小写像によるフラクタルをなすこと、またグラフ有向集合ともみなされること、さらにグラフ有向集合が Markov-自己相似集合と同じであること、を示した。他方ランダム反復アルゴリズムの理論を立てた。これによってグラフ有向集合に対する新しい見方が与えられ、またランダム反復アルゴリズムに多くの拡張モデルがあることが判明した。
- (4) 極限再帰関数と  $\Sigma^0_1$  排中律など拡張された構成的原理に関する論理的な相互関係の分類が完成した。さらに、極限計算可能数学の形式的体系の証明アニメーションについて、部分的カット除去という方法で計算量を減

小さく、その実装も行った。

- (5) 思想的背景として、極限計算のアイデアの元となったヒルベルトの有限基底定理の証明を分析し、それに関して新カント派の哲学、とくに H. コーエンの「無限小（実は極限）の哲学」との類型的相似性を発見した。また、田辺の「種の論理」の資料研究を通して無限プロセスの考察を行った。

以上数学および数学基礎論における新しい着想による具体的な多くの結果を得た。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① Mariko Yasugi, Masako Washihara, Sequential computability of a function-limiting recursion versus effective uniformity-, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, Vol. 71, 2010, pp. 331-341.
- ② Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Fine convergence of functions and its effectivization, *Automata, Formal Languages and Algebraic Systems (World Scientific)*, 査読有, 2010, pp. 139-162.
- ③ 林晋, 「数理哲学」としての種の論理—田辺哲学テキスト生成研究の試み(一)—, 紀要 『日本哲学史研究』(京都大学文学研究科・日本哲学史研究室紀要), 査読無, 第 7 号, 2010, pp. 40-75.
- ④ Stefano Berardi, Thierry Coquand, Susumu Hayashi, Games with 1-backtracking, *Annals of Pure and*

- Applied Logic, 査読有, vol.161-10, 2010, pp.1254-1269.
- ⑤ Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Fine-computable functions on the unit square and their integral, Journal of Universal Computer Science, 査読有, Vol.15, 2009, pp. 1264-1279.
- ⑥ Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Hideki Tsuiki, Fine continuous functions and fractals defined by infinite systems of contractions, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 査読有, Vol. 5489, 2009, pp. 1264-1279.
- ⑦ Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Hideki Tsuiki, Random iteration algorithm for graph-directed sets, Proceedings of the Sixth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, Dagstuhl Research Online Publication, 査読有, 2009/2275, 2009, pp. 245-256.
- ⑧ Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Computability of probability distribution, Proceedings of the Sixth International Conference on Computability and Complexity in Analysis, 査読有, Dagstuhl Research Online Publication, 2009/2270, 2009, pp.185-196.
- ⑨ 八杉満利子, 連続体上の計算概念について-再帰関数を越えるもの-, 哲学論叢(京都大学哲学論叢刊行会編), 査読無, XXXV 巻, 2008, 199-209.
- ⑩ Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Integral of two-dimensional Fine-computable functions, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 査読有, Vol.221, 2008, 141-152.
- ⑪ Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Effective Fine convergence of Walsh Fourier series, Mathematical Logic Quarterly, 査読有, Vol.54, 2008, 519-534.
- [学会発表] (計 12 件)
- ① Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Fine computability of probability distribution functions and computability of probability distributions on the real line, Computability and Complexity in Analysis (CCA2011), February 4, 2011, University of Cape Town, South Africa.
- ② 八杉満利子, 極限再帰性という計算概念の基礎, 科学基礎論学会, 2010年6月13日, 専修大学生田キャンパス.
- ③ Mariko Yasugi, Masako Washihara, On sequential computability of a function, Workshop on Constructive Aspects of Logic and Mathematics, Marth 10, 2010, 金沢エクセルホテル東急.
- ④ Mariko Yasugi, Computation in the limit - its image and philosophy behind - , Logic, Game Theory and Social Choice 6, August 29, 2009, 筑波大学.
- ⑤ Yoshiki Tsujii, Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Hideki Tsuiki, Random iteration algorithm for graph

directed sets, CCA2009, August 21, 2009, University of Ljubljana, Slovenia.

- ⑥ Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Computability of probability distributions, CCA2009, August 20, 2009, University of Ljubljana, Slovenia.
- ⑦ Mariko Yasugi, Cognition of computation by limiting recursion, TF4-E Workshop, March 23, 2009, 京都産業大学.
- ⑧ Takakazu Mori, Mariko Yasugi, Yoshiki Tsujii, Integral of two-dimensional Fine-computable functions, CCA2008, August 23, 2008, FernUniversity-Hagen, Germany.
- ⑨ Mariko Yasugi, Effective uniformity and limiting recursion in computable analysis, Workshop on Constructivism: Logic and Mathematics, May 30, 2008, 金沢文化ホール.

[その他]

ホームページ等

<http://www.cc.kyoto-su.ac.jp/~yasugi/page/index-j.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

八杉 満利子 (YASUGI MARIKO)

京都産業大学・名誉教授

研究者番号：90022277

### (2) 研究分担者

森 隆一 (MORI TAKAKAZU)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：00065880

小林 聡 (KOBAYASHI SATOSHI)

京都産業大学・コンピュータ理工学部・教授

研究者番号：70234820

辻井 芳樹 (TSUJII YOSHIKI)

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：90065871

### (3) 連携研究者

林 晋 (HAYASHI SUSUMU)

京都大学大学院・文学研究科・教授

研究者番号：40156443