

機関番号：32682

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540144

研究課題名（和文） 反応拡散系の解の大域的挙動と非線形性の分類

研究課題名（英文） Classification of nonlinearities of reaction-diffusion systems from a dynamical viewpoint

研究代表者

二宮 広和 (NINOMIYA HIROKAZU)

明治大学・理工学部・准教授

研究者番号：90251610

研究成果の概要（和文）：反応拡散系の非線形性を分類するために、以下のような研究成果を得た。ある種の反応拡散系の急速反応極限の極限問題の導出を行い、非線形性の退化と極限の関係を調べた。また、アレン・カーン方程式のような単純な反応拡散系の非平面進行波解の構成を行い指状進行波解の構成や反応拡散系から導出される自由境界値問題のスポット型進行波解の構成を行った。また、領域変形による楕円型方程式の解の不完全分岐についても調べた。

研究成果の概要（英文）：To classify the nonlinearities of reaction-diffusion systems, we studied the following researches. We derive the limit problem from some reaction-diffusion systems by using the fast reaction limit and discuss the relationship between the degeneracy of nonlinearity and the limit problem. We also constructed non-planar traveling waves of Allen-Cahn equations or the free boundary value problem which comes from some reaction-diffusion system, which are of finger type and of spot type. We also studied the imperfect bifurcation of some elliptic problem under the perturbation of the domain.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：反応拡散系，爆発問題，解の大域的存在，急速反応極限，進行波解，全域解

1. 研究開始当初の背景

自然界に現れる方程式は、複数の化学物質の反応とその拡散で記述されることが多い。この方程式は、反応拡散系と呼ばれる方程式で、拡散項と反応項のみからなる非線形偏微分方程式系である。つまり、常微分方程式系に対角成分のみをもつ拡散項をつけた m 成分の放物型偏微分方程式

$$u_{j,t} = d_j \Delta u_j + f_j(u_1, \dots, u_m) \quad (j=1, \dots, m)$$

である。この方程式は、化学反応だけでなく、細菌の増殖や運動、生態系のモデル、結晶成長などの相転移モデルなど多くの分野で現れる重要な方程式の一つである。解の局所的な存在や一意性は、古典的な定理から分かっているが、解の大域的な存在や解の大域的挙動に関する一般的な定理は少なく、非線形性に依存した方程式固有の問題となっている。反応拡散系の一般論が様々な分野から期

待されている。反応拡散系の一般論を構成するには、非線形性の制限と得られる結果の汎用性とのバランスが重要なポイントとなる。不変領域の理論や無限次元力学系、順序保存力学系などは少ない成功例と言えるだろう。こうした中、めざましく発展してきた反応拡散系の手法を発展させて、反応拡散系に非線形性と解の挙動に関する相関を調べる土壌が整ってきた。

2. 研究の目的

本研究では、解の大域的挙動の視点から反応拡散系の分類を行うために、以下の3つの視点から反応拡散系の分類を研究する。

テーマ1： 拡散誘導爆発の視点から2成分の反応拡散系の分類

テーマ2： 急速反応極限の視点からm成分の反応拡散系の分類

テーマ3： 単純な反応拡散系のアトラクターの構造解析

テーマ1では、有界領域上の2成分の反応拡散系を取り扱う。主に境界条件としてノイマン境界条件を仮定する。反応拡散系の局所解の存在は、古典的な定理から保証されているが、時間大域的な解の存在は、非線形性に依存している。どのような反応拡散系で拡散誘導爆発が起き、どのような反応拡散系で拡散誘導爆発が起きないのか調べる。

テーマ2では、反応拡散系は、どの程度広い範囲の方程式系なのかを考える。つまり、反応拡散系の極限として反応拡散系以外の方程式系を含んでいることを示すことで、反応拡散系の範疇の大きさを調べていく。これは、大自由度な(反応拡散)系をいかにして小自由度の(極限)系に帰着させていくかという問題でもある。本研究のテーマ2では、このような急速反応極限について考察する。

次に反応拡散系のより細部の解構造を分類することを考える。アトラクターは、任意の正あるいは負の時刻でも存在する解から構成されている。このような解は全域解と呼ばれる。通常、放物型偏微分方程式系では、時間負の方向には解けないが、アトラクターの要素は、時間が負の方向にも存在する解となっている。反応拡散系の非線形性とアトラクターの関係を考えると、比較的簡単な系でもアトラクターの構造や非線形性との関係はあまり分かっていない。テーマ3では反応拡散系の中でも簡単な方程式の例であるアレックス・カーン方程式、フィッシャー方程式、2成分拡散協調系のアトラクターを扱う。

これら3つのテーマの結果を用いて、非線形性の分類へと研究を進めていくことを目的としている。

3. 研究の方法

テーマ1： 拡散誘導爆発の視点から2成分の反応拡散系の分類

研究代表者は1998年に溝口准教授(東京学芸大学)、柳田教授(東京工業大学)との共著論文

M. Mizoguchi, H. Ninomiya, and E. Yanagida: Diffusion-induced blowup in a nonlinear parabolic system, *J. Dynamics and Differential Equations* 10 (1998), 619--638

において拡散誘導爆発が起きる反応拡散系の例を構成した。拡散誘導爆発とは、常微分方程式系のすべての解は、時間無限大まで存在するが、拡散をつけた反応拡散系には、有限時間で爆発するような解が存在する現象を指す。この論文で構成した例は、2成分系であり、常微分方程式系のすべての解は、時間無限大で原点に収束するが、拡散項をつけた反応拡散系には、有限時間で爆発するような解をもつ例となっている。この研究以降、WeinbergerやSoupletなどが拡散係数の等しい場合の例の構成に成功している。拡散誘導現象のメカニズムを調べるため、H.

Weinberger教授(ミネソタ大学)との共同研究を行い、線形項をつけることにより、爆発解をもたない常微分方程式系が爆発解をもつようになる現象について考察した。これは線形誘導爆発と呼ばれる。内向きの線形項を加えることによっても、線形誘導爆発が引き起こされることを示している。線形誘導爆発の特徴付けを行うため、論文

H. Ninomiya and H. F. Weinberger: On p -homogeneous systems of differential equations and their linear perturbations, *Applicable Analysis* 85 (2006), 225-246

において、 p 次斉次非線形項をもつ常微分方程式系がどのような条件下で線形誘導爆発を起こすか調べた。テーマ1では、この研究を反応拡散系に拡張し、 p 次斉次非線形項をもつ反応拡散系において拡散誘導爆発の起きる条件を調べていく。MathematicaやCを用いた数値計算も合わせて行うことにより、拡散誘導爆発を起こす非線形性をより確実に予想を立てて研究が進めてきた。

テーマ2： 急速反応極限の視点からm成分の反応拡散系の分類

連携研究者飯田教授(宮崎大学)とはその共著論文において非線形拡散の一種である交差拡散系を反応拡散系で近似する研究を行ってきた。また、D. Hilhorst教授(パリ南大学)、三村昌泰教授(明治大学)らとは、2相ステファン問題を近似する反応拡散系の構成を行ってきた。これらの研究に共通す

ることは、反応が非常に速い急速反応極限を用いている点である。ここではそれらの手法を用いて、一般的な反応拡散系に適用することを試みる。急速反応極限が収束することを証明することは、パラメータに依存しない解の有界性を示すことに相当している。そのため、非線形性にある種の退化条件が必要になっている。その退化条件を弱めるために、退化条件をみださない非線形性に関して急速反応極限を考える。

テーマ3：単純な反応拡散系のアトラクターの構造解析

森田善久教授（龍谷大学）、X.F. Chen 教授（ピッツバーグ大学）、J.S. Guo 教授（台湾師範大学）らと、アレン・カーン方程式の新しい全域解の構成を行ってきた。これらの研究で見つかった進行波解などの全域解をつなぐことによって新しい全域解の構成を試みる。空間の次元が2次元以上のときには、進行波解ですら分類されていない。平面波以外の新しい進行波解の構成を行っていく。この問題は、近年解決された De Giorgi の予想とも非常に関連の深い問題となっている。

また、単独でない反応拡散系へと拡張するため、協調拡散系のアトラクターについても考察する。この方程式系は2成分の反応拡散系であるが、比較原理が成り立つため、単独方程式の場合に近い結果が期待できる。

4. 研究成果

テーマ1では、拡散誘導爆発の視点から2成分の反応拡散系の分類を行うため、2成分系の爆発問題を研究している。現在、論文を執筆中である。また、拡散誘導爆発とは逆に拡散によって爆発が抑止される場合もある。これを拡散爆発抑止と呼ぶ。これに関しては、いくつかの結果を得たので、学会発表[8, 14, 16]を行った。

テーマ2に関しては、ある種の $2m$ 成分系での急速拡散極限の収束証明に成功した。これは、雑誌論文[5, 7]にまとめられている。また、急速反応極限は、これまで退化の度合いが低い場合に研究されてきた。退化の度合いがもう1次元高い場合の研究を行い、雑誌論文[1]にまとめた。また、学会発表[15]を行った。特異極限と関連して、穴の空いた領域での分岐構造を調べ、雑誌論文[3]にまとめた。

テーマ3では、アレン・カーン方程式の指状進行波解の構成に成功し、雑誌論文[6]にまとめた。これは、安定定常解と不安定定常解をつなぐ進行波解になっている。また、これまでの全域解、進行波解の研究を雑誌論文[2]にまとめた。学会発表[1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11]を行った。協調系への

応用として、学会発表[5]を行った。

孤立進行波解を捉えるための研究として、新しい自由境界問題を考え、スポット型進行波解の構成に成功し、雑誌論文[4]にまとめている。また、学会発表[9, 12, 13]を行った。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 7 件）

- ① H. Murakawa and H. Ninomiya: Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 379 (2011), No. 1, 150-170, 査読有り
- ② Y. Morita and H. Ninomiya: Traveling wave solutions and entire solutions to reaction-diffusion equations, *SUGAKU Expositions*. 23 (2010) No. 2, 213-233, 査読有り
- ③ C. Bandle, Y. Kabeya and H. Ninomiya: Imperfect bifurcations in nonlinear elliptic equations on spherical caps, *Communications on Pure and Applied Analysis* 9 (2010) No. 5, 1189-1208, 査読有り
- ④ J.-S. Guo, H. Ninomiya and J.-C. Tsai: Existence and uniqueness of stabilized propagating wave segments in wave front interaction model, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 239 (2010) No. 3-4, 230-239, 査読有り
- ⑤ D. Hilhorst, M. Mimura, H. Ninomiya: Fast Reaction Limit of Competition-Diffusion Systems. In: C.M. Dafermos and Milan Pokorný, editors: *Evolutionary Equations*, Vol 5, *Handbook of Differential Equations*, Hungary: North-Holland (2009), 105-168, 査読有り

⑥ Y. Morita and H. Ninomiya: Monostable-type traveling waves of bistable reaction-diffusion equations in the multi-dimensional space, Bulletin of the Institute of Mathematics. 3 (2008) No. 4, 567-584, 査読有り

⑦ D. Hilhorst, M. Iida, M. Mimura and H. Ninomiya: Relative compactness in L^p of solutions of some 2m components competition-diffusion systems, Discrete and continuous dynamical systems. 21 (2008) No. 1, 233-244, 査読有り

[学会発表] (計 16 件)

① H. Ninomiya : Non-planar traveling waves of reaction-diffusion equations, 19th Workshop on Differential Equations, Jan. 14-17, 2011, National Cheng Kung University, Taiwan

② H. Ninomiya: Non-planar traveling waves of reaction-diffusion equations, Nonlinear Analysis and Integrable Systems 非線形解析と可積分系数理, November 18-19, 2010, Ryukoku University, Kyoto

③ H. Ninomiya: Traveling waves of Allen-Cahn equations, Applied Mathematics Forum, Tohoku University, Mini-workshop on “Modeling, Simulations and Analysis of Biological Pattern Formation” , October 29-30, 2010, Heanel Sendai

④ H. Ninomiya : Non-planar traveling waves of reaction-diffusion equations, Workshop on Pattern formation in Chemical and Biological Systems, October 25-26, 2010, Eötvös University,

Budapest, Hungary

⑤ H. Ninomiya: Stacked fronts for cooperative systems with equal diffusions, Reaction-Diffusion Systems: Experiments, Modeling, and Analysis, October 21-22, 2010, Universite de Paris-Sud 11, Orsay

⑥ H. Ninomiya: Traveling waves of Allen-Cahn equation, Workshop on Interface motion and Traveling Waves in Reaction Diffusion Equations, October 13-14, 2010, Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai, China

⑦ H. Ninomiya: Traveling waves in the various shapes, AIMS conference, May 25-28, 2010, Dresden

⑧ H. Ninomiya: On the diffusion-preventing blowup of reaction-diffusion equations, Spatio-Temporal Patterns from Mathematics to Biomedical Applications, Japanese French Meeting ReaDiLab 2010, March 15-17, ARCHAMPS, FRANCE

⑨ H. Ninomiya: Traveling segments and rotating waves of wave front interaction model, 第 27 回九州における偏微分方程式研究集会, Jan. 25-27, 2010, 九州大学

⑩ 二宮広和: 最大値原理からみたパターン形成, 現象数理: 冬の学校 2009 パターンダイナミクス 1-2-3, Dec. 9-11, 2009, 明治大学

⑪ H. Ninomiya: Some entire solutions of reaction-diffusion equations, The Second Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDEs,

December 1-4, 2009, Meiji University

- ⑫ H. Ninomiya: Propagating waves in wave front interaction model, 非線形発展方程式と現象の数理, Oct. 20-23, 2009, RIMS Kyoto University, Kyoto
- ⑬ H. Ninomiya: Traveling segments in excitable media, Reaction-diffusion systems : Modeling and analysis, June 2-5, 2009, Universite de Paris-Sud 11, Orsay
- ⑭ H. Ninomiya: Blowup in reaction-diffusion equations, 6th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, May 25-29, 2009, Gaeta, Italy
- ⑮ H. Ninomiya: Fast reaction limit and Turing's instability, PDE approximations in Fast reaction - Slow diffusion scenarios, November 10-14, 2008, Lorentz center, Leiden
- ⑯ H. Ninomiya: Conditions for the blowup of solutions to a reaction diffusion equations, "Third Euro-Japanese workshop on Blowup", September 8-12, 2008, Tohoku University

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.meiji.ac.jp/~ninomiya/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

二宮 広和 (NINOMIYA HIROKAZU)

明治大学・理工学部・准教授

研究者番号 : 90251610

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

飯田 雅人 (IIDA MASATO)

宮崎大学・工学部・教授

研究者番号 : 00242264