

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 8 日現在

機関番号：62603

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540147

研究課題名（和文） 測度空間における最適化の理論と計算手法およびその応用に関する研究

研究課題名（英文） Optimization Theory and Computational Methods in Measure Spaces with Applications

研究代表者

伊藤 聡 (ITO SATOSHI)

統計数理研究所・数理・推論研究系・教授

研究者番号：50232442

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、測度空間における最適化に基づく確率的あるいは非確率的な分布の推定の理論と計算手法の開発、また統計科学や制御工学・情報理論に関わる諸問題への応用である。特に、測度空間上の線形あるいは凸 2 次計画問題に対する実用的な計算手法として双方向切除平面法の開発を行った。また、研究期間後半においては、一般の非線形凸形式に関する理論の構築に重点をおき、情報理論における通信路容量問題などへの応用を行った。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is the development of theory and computational methods of estimation of probabilistic or non-probabilistic distributions based on optimization in measure spaces with practical applications to statistical science, control engineering or information theory. The bilateral cutting plane method was developed as an efficient algorithmic framework for linear or convex quadratic programming in measure spaces. We have concentrated on the theory for general nonlinear convex programming in the latter half, and applied it to the problem of communication channel capacity in information theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：統計数学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：無限計画・半無限計画・切除平面法・容量問題・モーメント問題・確率分布の推定・通信路容量・ロバスト最適化

1. 研究開始当初の背景

1950年代から60年代にかけて研究された電磁気学の問題の一つに導体の電荷の分布を決定する容量問題があり、特に60年代後半には日本人数学者らにより線形計画の理論を用いて解の存在などの解析的性質が調べられた。この容量問題は数学的にはボレル測度の空間の上での不等式制約条件つき線形計画問題として定式化される（一般化容量問題）。また同様に、統計科学における古典的なモーメント問題も測度空間上の等式制約条件つき線形計画問題として一般化される（一般化モーメント問題）。

このような問題において、測度を定義する空間が有限集合である場合は通常（有限次元の）線形計画問題に、また決定変数を絶対連続な測度に制限した場合には関数空間上の線形計画問題となることに注意されたい。一般に測度は離散的な成分と絶対連続な成分の和であるが、それゆえ測度空間上の最適化問題は有限次元の最適化と関数空間における最適化を統一的に取り扱うことができる。さらに全測度を1とする線形制約条件を付加すれば確率分布の推定問題となる。

本研究課題の申請時点において、非線形凸形式への拡張をも考慮に入れた広いクラスの最適化問題を測度空間上で統一的に取り扱うための研究は行われておらず、最適解を求める効率的な数値解法の開発、さらには制御工学や統計科学などの未解決の問題への応用を考える段階にはなかった。

2. 研究の目的

本研究においては、ボレル測度の空間上で定義された凸最適化問題を対象として、その理論・計算手法・応用について考察することを目的とし、当初以下のような方向で研究を進めることを考えた。

(1) 双方向切除平面法の開発

非線形計画問題や半無限計画問題に対する反復解法の一つとして切除平面法がよく知られているが、本研究においては、測度空間上の凸最適化問題に対する実用的な切除平面法の開発を行なう。

(2) 諸問題への応用と非線形凸形式に対する理論の構築

応用という観点からすると、本研究課題において構築する理論・計算手法の非線形凸形式への拡張がとりわけ重要である。

応用の対象として、ゲーム理論やロバスト最適化また統計科学上の諸問題も当然考えられるが、本研究においては、特にダイナミ

クスを内包する問題として最適制御問題への応用を主に考察する。

しかしながら、研究計画調書の段階では思いもよらなかったが、情報理論における通信路容量の問題は測度空間上の非線形凸計画問題の一例であり、理論の構築またそれを検証する上で制御問題よりも適していることから、こちらを応用の主対象とすることとした。

3. 研究の方法

(1) 双方向切除平面法の開発

一般化容量問題の計算手法としては、本研究の共同研究者でもある S.-Y. Wu 教授（台湾・国立成功大学）のグループが、制約条件を緩和して得られる半無限計画問題を反復的に解く切除平面法（以下では単方向切除平面法と呼ぶ）を90年代後半から今世紀初頭にかけて開発している。同研究は理論的な解析を主としたものであるが、各反復において半無限計画問題を解かなければならないという弱点がある。本研究では、まず一般化容量問題に対してこの弱点を克服する双方向切除平面法の開発を最初の目標とした。

一般に、切除平面法に限らず、反復近似解法である緩和法は、各反復における目的関数値が単調非減少あるいは単調非増加であるなど、単調性を重要な特徴として持っている。例えば、上述した一般化容量問題に対する単方向切除平面法でも、各反復における半無限計画問題の目的関数値には単調性がある。本研究においては、制約条件だけでなく決定変数（測度）をも緩和する双方向の（このために必ずしも単調性を持たない）切除平面法について考察した。

単方向性の切除平面法においては必ずしも緩和問題の双対を解く必要がないのに対して、双方向切除平面法では各反復において有限次元の緩和問題とその双対を同時に解く必要がある。この意味で本手法を主双対切除平面法と呼ぶこともできる。また、2次形式を含む一般の凸形式への拡張、決定変数を絶対連続な測度に制限したときの算法の漸近的な振舞いについて考察した。

(2) 諸問題への応用と非線形凸形式に対する理論の構築

通信路容量とは雑音のある通信路において単位時間に送ることができる情報量の上限であり、具体的には確率測度として表現される入力分布と通信路自体により定義された相互情報量を適当な制約条件のもとで入力分布に関して最大化することによって得られる。

制約条件によっては通信路容量を達成する入力分布が離散分布となることが報告され、そのような通信路と制約条件の組合せはその後も増え続けている。この理論的裏付けを与える唯一の既存研究は複素関数論に基づいているため、スカラ（一入力一出力）系にしか適用できない。このような通信路容量問題に本研究における測度空間上の凸最適化理論を適用することにより、これまで知られていなかった新たな知見を得ること、さらにはベクトル（多入力多出力）通信路へ拡張する道を開くことを目指した。

4. 研究成果

(1) 双方向切除平面法の開発

測度空間上の等式および不等式制約条件つき凸最適化問題に対する実用的な数値解法として双方向切除平面法を開発した。双方向切除平面法では各反復において有限次元の緩和問題とその双対を同時に解く必要がある。単方向の切除平面法においては必ずしも緩和問題の双対を解く必要がないことを考えれば、本手法は主双対切除平面法とも呼ぶべきものである。

本研究においては、緩い仮定のもとで同手法の最適解への大域的収束を示し、各反復における最適目的関数値との誤差の上限を制約の侵害量を用いて評価した。すなわち有限回の反復で中断したとしても、その時点での暫定解の信頼性が定量的に評価できるという特徴を持つ。また実用的な実装を目指して、各反復における緩和問題の近似的な求解と低次元化、さらに決定変数を絶対連続な測度に制限したときの切除平面法の漸近的な振舞いについての解析を行った。

(2) 諸問題への応用と非線形凸形式に対する理論の構築

本研究ではコンパクト空間上の測度空間における凸最適化を考えているが、これは通信路容量問題の言葉で言えば、ピークパワー制約がある場合、すなわち入力データの取り得る値が有限である場合に相当する。

特に測度が確率的である場合、すなわち確率測度がコンパクト空間上で定義される場合に、他の線形モーメント条件の有無に関わらず、目的関数が凸性や微分可能性などの緩い条件を満たすならば、最適解が離散測度になることを示した。これは、非線形の無限計画問題であっても、適当な条件の下では、線形の半無限計画問題と局所的に等価になり得る、ということに基づいている。

この新たな理論により、ピークパワー制約がある場合に通信路容量を達成する分布が離散分布となる理由を複素関数論によらずに説明することが可能になった。この結果は

通信路によらず成立し、また複素関数論に基づかないため多入力多出力系すなわちベクトル通信路に対しても自然に拡張できることができる。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

- ① 伊藤 聡, “測度空間における凸最適化と半無限計画,” 第 24 回 RAMP シンポジウム論文集, 日本オペレーションズリサーチ学会常設研究部会数理計画, 2012, 査読無
- ② 伊藤 聡, “クリンチとエリミネーションの数理〜リーグスポーツにおけるロバスト最適化,” システム/制御/情報, vol. 26, no. 7, pp. 344-349, 2012, 査読有
- ③ S. Ikeda and S. Ito, “Min-max strategy for prediction,” 土谷隆(編), 最適化: モデリングとアルゴリズム 24 (統計数理研究所共同研究レポート 267), pp. 15-23, 2011, 査読無
- ④ S. Ito and S. Ikeda, “Capacity-achieving probability measure in communication channels,” X. Sun and X. Bai (eds.), *Book of Abstracts of the 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications*, page 98, 2010, 査読無
- ⑤ S. Ito, S. Y. Wu, T. J. Shiu and K. L. Teo, “A numerical approach to infinite-dimensional linear programming in L_1 spaces,” *Journal of Industrial and Management Optimization*, Vol. 6, pp. 15-28, 2010, 査読有

〔学会発表〕（計 8 件）

- ① 伊藤 聡, “測度空間における凸最適化と半無限計画,” 共同研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 2012年3月23日, 政策研究大学院大学(東京都港区)
- ② 伊藤 聡, “コンパクト空間上で定義された測度の凸最適化,” 共同利用研究「確率測度の最適化と通信路容量」研究会, 2012年3月12日, 統計数理研究所(東京都立川市)
- ③ 伊藤 聡, “Locally semi-infinite optimization,” 統計的機械学習研究センター最適化推論プロジェクト研究会, 2012年1月20日, 統計数理研究所(東京都立川市)
- ④ 伊藤 聡, “離散的最適化とサービス科学,” 科研費研究集会「リスク評価と最適化に関する研究集会」, 2010年12月26

- 日、同志社大学（京都府京田辺市）
- ⑤ S. Ito and S. Ikeda, “Capacity-achieving probability measure in communication channels,” The 8th International Conference on Optimization: Techniques and Applications, 2010年12月11日, 復旦大学（中華人民共和国・上海市）
- ⑥ 伊藤 聡, “測度空間における凸最適化,” 共同研究集会「確率測度の最適化と通信路容量」, 2010年7月27日, 統計数理研究所（東京都立川市）
- ⑦ 池田思朗, 伊藤 聡, “区間推定と予測分布について,” 共同研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 2010年3月23日, 統計数理研究所（東京都立川市）
- ⑧ S. Ito, “A bilateral cutting framework for infinite-dimensional optimisation,” Mathematics Colloquium, 2008年5月9日, RMIT大学（オーストラリア・メルボルン市）

〔産業財産権〕

○出願状況（計4件）

名称：計測点算出装置及び方法
 発明者：村瀬道夫、土谷 隆、伊藤 聡、石黒真木夫、上野玄太、染谷博司
 権利者：株式会社小野測器、大学共同利用機関法人情報・システム研究機構
 種類：特許
 番号：特願 2010-145615
 出願年月日：22年6月25日
 国内外の別：国内

名称：演算装置及び演算方法
 発明者：伊藤 聡、大場信之介
 権利者：大学共同利用機関法人情報・システム研究機構、一般社団法人共同通信社
 種類：特許
 番号：特願 2010-169244
 出願年月日：22年7月28日
 国内外の別：国内

名称：境界内計画評価装置及び方法
 発明者：村瀬道夫、三瓶祐一郎、翁志強、土谷 隆、伊藤 聡、上野玄太、染谷博司
 権利者：株式会社小野測器、大学共同利用機関法人情報・システム研究機構
 種類：特許
 番号：特願 2011-203264
 出願年月日：23年9月16日
 国内外の別：国内

名称：限界点探索装置及び方法
 発明者：村瀬道夫、三瓶祐一郎、翁志強、土谷 隆、伊藤 聡、上野玄太、染谷博司

権利者：株式会社小野測器、大学共同利用機関法人情報・システム研究機構

種類：特許
 番号：特願 2011-203270
 出願年月日：23年9月16日
 国内外の別：国内

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 聡 (ITO SATOSHI)
 統計数理研究所・数理・推論研究系・教授
 研究者番号：50232442

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：