

機関番号：10101

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ~ 2010

課題番号：20540150

研究課題名 (和文) 仮想変わり点の定めるリーマン面上のストークス幾何の研究

研究課題名 (英文) On the geometry of a Riemann surface underlying a virtual turning point

研究代表者

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：00238817

研究成果の概要 (和文)：

本研究課題の目的は、完全 WKB 解析における仮想変わり点の幾何を解明することである。研究代表者は、仮想変わり点のなすリーマン面を構成し、それ上に深さ関数と呼ばれる、ストークス曲線の依存関係を表す指標を構成した。深さ関数は、互いに複雑に依存しているストークス曲線と仮想変わり点の関係を表す量であり、この関数を用いることにより様々な性質を帰納的に証明することが出来るようになる。そのような深さ関数の応用として、ストークス曲線上の接続係数を与えるアルゴリズムの正当性を示した。

研究成果の概要 (英文)：

We study the geometry underlying a virtual turning point, which appears in exact WKB analysis. For this purpose, we have constructed a Riemann surface associated with a linear differential equation with a large parameter and a depth function which indicates dependency between new Stokes curves. As an application, we show that we can really obtain connection coefficients on all the new Stokes curves.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学・代数解析

キーワード：WKB 解析

1. 研究開始当初の背景

完全 WKB 解析は特異摂動パラメータを持つ常微分方程式の特異摂動問題を解く手法のひとつであり、理論物理等でひろく用いられている。

この方法で得られた解は、一般に変わり点

と呼ばれる点から派生するストークス曲線を堺にして、その漸近挙動が大きく変る (ストークス現象)。従って、ストークス曲線のなす幾何を理解することは、解の大域的な振舞を理解するために理論面からも応用面からも重要である。

2 階の大きなパラメータを持つ線形上微分方程式に対しては、通常変わり点とそれらから派生するストークス曲線のみでストークス幾何は決定される。これに対して、3 階以上の大きなパラメータを持つ常微分方程式では、2 階の場合とストークス幾何が大きく異なることが知られている。高階方程式の場合は、通常変わり点以外に青木、河合、竹井らによって導入された仮想変わり点が更に必要である。また、ストークス現象は、古典的な（通常）変わり点から派生するストークス曲線の他に、仮想変わり点から派生する（新しい）ストークス曲線上でも起きることがわかっている。

このことから、高階の線形常微分方程式のストークス幾何を扱うには、仮想変わり点のなす幾何を理解することが、特に、重要な問題となる。

研究代表者は、完全 WKB 解析におけるストークス幾何、特に、仮想変わり点のなす幾何を研究してきた。一般に仮想変わり点のなす幾何は大変複雑である。例えば、仮想変わり点は無限個存在し、従ってそれらの点から派生するストークス曲線も無限本存在することになる。このことは、仮想変わり点もストークス曲線も複素平面上に稠密に存在する可能性があることを意味する（これらの無限本の曲線のうち実際にストークス現象起きる曲線は極めて限られており、そのほとんどが見かけの曲線である。）このような状況は、高階線形常微分方程式のストークス幾何を理解することの大きな障害となっている。

研究代表者は、このような困難を回避するために、仮想変わり点の性質を反映したある種のリーマン面を構成することに成功した。このリーマン面上では、仮想変わり点もそれらから派生するストークス曲線も離散的に存在している。また、このリーマン面上には大域的に定義された正則関数が存在し、仮想変わり点やストークス曲線は、この正則関数の零点で定義する事ができる。つまり、ストークス幾何の主要な性質は、この正則関数の性質に帰結されることとなる。これらの結果は、高階線形微分方程式のストークス幾何の研究において大変有用と考えられる。

2. 研究の目的

本研究課題の主要な目的は、“研究開始当初の背景”で述べた仮想変わり点を記述するリーマン面の性質をより深く研究することである。また、それらの性質を用いて、WKB 解析に於て重要な問題である、首藤らによって導入されたストークス曲線上のストークス接続係数を求めるアルゴリズムの正当性を示すことを目標としている。

このリーマン面の性質を研究する上での困難は、このリーマン面がもはやコンパクト

ではなく開いている事である。これは、仮想変わり点やそれらのストークス曲線が無限個存在することの反映でもある。従って、古典的なリーマン面の理論を直接用いることは出来ずなんらかの新たな手法が必要である。

このような手法として、複雑なリーマン面の構造を特徴付ける、ある種の特性量を構成することが重要であると考えられる。ひとたびこのような量が定義されれば、様々なリーマン面の性質をこの特性量を用いて帰納的に理解出来るようになるからである。従って本研究課題の最も重要な部分は、このような特性量の構成ということになる。

3. 研究の方法

本研究課題は、完全 WKB 解析、漸近解析等の様々な分野の知見が必要であり、これらの専門家との研究打ち合わせは非常に重要である。研究代表者は、青木貴史（近畿大学）、河合隆裕（RIMS）、竹井義次（RIMS）らとの研究打ち合わせを積極的に行った。

また、漸近解析の研究打ち合わせとして、パドバ大学（イタリア）の Luca Prelli や Giovanni Morando らを北大に招聘した。

これらの打ち合わせによる討論は大変有意義なものであり、研究課題の遂行に大きな進歩をもたらした。

4. 研究成果

研究目的で述べていることを、ほぼ達成出来た。

最も大きな成果は、仮想変わり点の幾何を反映する為に構成したリーマン面上に深さ関数とよばれるある種の指標を構成することに成功したことである。

この深さ関数はストークス曲線の依存関係を表わす量であり、これを用いることで様々な性質を帰納的に研究することが可能となる。

深さ関数の構成方法の概略は以下のようになっている。まず、ストークス曲線の拡張であるストークスパスを定義する。これは、いくつかのストークス曲線の一部からなる曲線で、いわゆるコヒーレントな点でストークス曲線の乗り換えをある特定の方向に許したものである。ストークスパスの大きな特徴は、ストークス曲線を定義するリーマン面上で定義された正則関数の実部が、この曲線に沿って単調関数となる事である。ストークス曲線自体もこの性質をもつことから、ストークスパスはストークス曲線の自然な拡張である。

単純な場合は、ストークスパスを用いて深さ関数が定義できるのであるが、一般の場合はこれでは不十分である。そこで、ストークスパスからなるストークスパスツリーと呼

ばれる二分木を考える。深さ関数は、このような二分木のうち最大の大きさをもつものの大きさと定義する。ここで一番難しい問題は、このような最大の二分木が存在して深さ関数の値が有限になることを示す点である。これを示すためには、先ほど登場した正則関数の性質を有効に使う必要がある。

このように、二分木自体はグラフ論的な概念であるが、深さ関数の構成にはストークス幾何の持つ解析的な性質が使われるのである。

この深さ関数の構成の論議のなかで、ストークス曲線上のコヒーレントな点が離散的であることも示すことができる。これは、仮想変わり点の個数が無限個ある可能性があるもので、決して自明な事ではないことに注意する。

研究期間の後半では、深さ関数を用いた応用として以下のことを示した。まず、青木、河合、竹井らによって導入された、ストークス曲線の有効な部分（ストークス現象が起きる部分）を決定する条件を満たすストークス幾何が必ず存在し、また、それが唯一であることを証明した。

また、首藤（首都大学）らによって提唱された、ストークス曲線の接続係数を求めるアルゴリズムの正当性を示した。

これらの結果の他に、非線形微分方程式系のストークス幾何も研究し多少の結果を得た。非線形方程式の場合、変わり点は第一種と第二種に分かれる。これら変わり点の個数を求めることは、理論的興味のほかに実際の（計算機を用いた）計算においても重要である。というのは、完全なストークス幾何を与えるためにはすべての変わり点が必要であり、1つでも不足するとストークス現象が起きる曲線を尽くせないからである。今回は、パンルベ系列のうち Noumi-Yamada 系に対して、第一種と第二種の変わり点の個数を与える公式を導いた。また、この研究の副産物として Noumi-Yamada 系を満たすゼロパラメータ解の存在を示し、また、その個数を与える公式も導いた。ここで用いられた論法は、Noumi-Yamada 系以外でも適用できるように改良され、ある種の条件（tame regular sequences）を満たせばゼロパラメータ解が存在することもわかっている。

ここに述べた結果は学会等で発表し、また、論文を発表済みもしくは投稿中である。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計6件）

1. Naofumi Honda and Giovanni Morando,

Stratified Whitney jets and tempered ultradistributions on the subanalytic site, Bulletin de la Societe Mathematique de France, in press, 2011, 査読あり

2. Naofumi Honda and Luca Prelli, Multi-specialization and multi-asymptotic expansion, Proceedings of the Japan Academy, 87, 2011, 69-72, 査読あり

3. Takashi Aoki, Naofumi Honda and Yoko Umeta, On the number of the turning points of the second kind of the Noumi Yamada system, RIMS Kokyuroku Bessatsu, in press, 2011, 査読あり

4. Naofumi Honda, The geometric structure of a virtual turning point and the model of the Stokes geometry, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B10, 2009, 63-117, 査読あり

5. Takashi Aoki and Naofumi Honda, Principally tame regular sequences associated with the forth Painleve hierarchy with a large parameter, Proceedings of the Japan Academy, 84, 2008, 42-47, 査読あり

6. Naofumi Honda, Gen Nakamura, R. Potthast and Murad Sini, The no-response approach and its relation to non-interactive methods for the inverse scattering, Ann Math. Pura Appl., 187, 2008, 188-215, 査読あり

〔学会発表〕（計5件）

1. 本多 尚文, 仮想変わり点の幾何とストークス係数, 平成 22 年度日本数学会秋季大会、函数方程式分科会特別講演, 名古屋大学, 2010 年 9 月 19 日, 招待講演

2. Naofumi Honda, Virtual turning points and Stokes coefficients, Recent Developments in Resurgent Theory and Related topics, RIMS Symposium, Kyoto, 2010 年 6 月 29 日

3. Naofumi Honda, A virtual turning point and its geometrical structure II, Foundation of exact WKB analysis and resurgent theory, RIMS Symposium, Kyoto, 2008 年 12 月 16 日

4. Naofumi Honda, A virtual turning point and its geometrical structure I, Foundation of exact WKB analysis and resurgent theory, RIMS Symposium, Kyoto, 2008 年 12 月 15 日

5. Naofumi Honda, On the deformation of the Riemann manifold underlying a virtual turning point, New approach to analytic equations –transformation theory, singular solutions and Stokes problem, RIMS Symposium, Kyoto, 2008 年 9 月 25 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号: 00238817

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし