

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月10日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540152

研究課題名（和文） 定値および不定値内積空間上の作用素の幾何構造解析

研究課題名（英文） Analysis on geometric structures of operators in definite or indefinite inner product spaces

研究代表者

佐野 隆志（SANO TAKASHI）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：20250912

研究成果の概要（和文）：

自己共役作用素やエルミート行列全体には大小関係が定義され、その関係を保存する関数は作用素（行列）単調関数と呼ばれます。その性質の特徴づけの一つとして、対応するレウナー行列の半正定値性が知られています。Rajendra Bhatia 氏との共同研究で、レウナー行列の条件付負性と正性の特徴づけ（作用素凸性など）を与えました。日合文雄氏との共同研究では、行列サイズに依存する諸条件について詳細な議論を行い、更なる一般化を行いました。

研究成果の概要（英文）：

For selfadjoint operators/Hermitian matrices, we can define the order structure. For a real-valued function  $f$  we know the functional calculus by  $f$ . If this operation preserves the preceding order, then we say that  $f$  is operator/matrix monotone. It is well-known that this is equivalent to the positive-semidefiniteness of the corresponding Loewner matrices to  $f$ . Rajendra Bhatia and I studied the conditional positive/negative definiteness of Loewner matrices to have their characterization with applications. Fumio Hiai and I gave more precise arguments to have their generalizations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	300,000	90,000	390,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,300,000	690,000	2,990,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析・作用素論・行列解析

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は申請時の数年前から作用素論（特に行列解析）に焦点をあてた研究を行っています。具体的には、ユニタリー不変ノルムの一般化である左ユニタリー不変ノルムに関する研究、バナッハ空間上のある種のノ

ルムによる可換性の特徴づけ、作用素単調もしくは作用素凸ではない関数によるトレースの特徴づけ、不定値内積空間上の諸不等式：古田不等式やカオスの順序、などの研究、また行列環のテンソル空間上の部分転置写像についての安藤氏との共同研究、など精力

的に作用素論での研究を行っています。また本研究課題申請時には、2008年3月から6ヶ月間、「作用素論からの正定値行列空間の幾何構造解析」をテーマに、インド統計研究所にて研究を行う機会を山形大学のサポートにより得ています。

## 2. 研究の目的

(1) 「正定値行列空間の幾何構造解析」では、二つの正(定値)作用素に関する「平均理論」いわゆる安藤・久保理論に対し、安藤-Li-Mathias, Bhatia-Holbrook, Lawson-Lim による三つ以上の正作用素(行列)に対する幾何平均研究が成されており、研究代表者は、世界的リーダーの1人であるBhatia氏の研究機関での滞在を契機として、当方向での研究の抽象化・一般化などの拡張を目的としました。

(2) 「不定値内積空間上の作用素構造研究」に関しては、安藤毅氏の結果の拡張として、代表者はFuruta inequality of indefinite type という論文などを著しており、不定値内積空間上のJ-縮約作用素全体の幾何構造解析や作用素凸の概念に関する考察などを目的としました。

## 3. 研究の方法

(1) 共同研究者とは可能な限り、直接会って共同研究を推進し、またそれを補完するものとしてメールによる意見交換などを行い、論文発表等の成果に結実させています。具体的には、インド(デリー2008、2009、2012・バンガロール2012) イタリア(ピサ2010・トリエステ2009)、韓国(テグ2012)などで、共同研究者と直接会って、研究交流を行いました。

(2) 国内外の研究集会などで、招待講演などの機会が与えられた時は、可能な限り参加し、研究成果に関する評価、コメントなど情報収集し、更なる研究につながる場を大切にしています。具体的には、イタリア(ピサ2010)、ポーランド(2010)などでの国際的な研究集会、また、京都大学数理解析研究所研究集会(2010、2011、2012)、作用素論・作用素環論研究集会(2010、2011)、日本数学会(2012、函数解析学特別講演)、日本数学会東北支部会(2009、特別講演)、などに参加し講演などを行いました。2011年度には

(3) 専門家による国内外での小規模なセミナーも、貴重な生産的な場として、機会がある限り参加・発表に関わり、研究に対しての刺激を得たいと考えます。具体的には、2年前までは東北大での作用素論・作用素環論セミナーがありました。

## 4. 研究成果

(1) R. Bhatia氏との共同研究として、レウナー行列の条件付負性が作用素凸性に、また条件付正性が作用素凸関数の $t$ 倍に対応することを論文発表しました。この結果の応用として、レウナー行列の固有値分布(正・負・ゼロ)数を決定し、 $r$ 乗( $0 < r < 1$ )に対応するレウナー行列の無限分解可能性の初等的証明や、作用素凸関数の逆が作用素単調である(安藤の結果)ことの別証明をレウナー行列の解析により与えました。またKwong行列の解析も同様の手法で行いました。

また別論文ではR. Bhatia氏との共同研究の続きとして、関数 $f(t) = t^p$ のレウナー行列の半正定値性や条件付き負・正性などの初等的な証明や、作用素凸性が一般には条件付き負性を意味しないことを示しました。

続いて日合文雄氏との共同研究では、上述の2つの論文の結果および内山充氏による考察に対し、大坂-富山、Hansen-Pedersenによる行列サイズに依存する諸条件の関数の詳細な議論を行い、更なる一般化を行いました。具体的には、正の実軸上で定義された関数 $f(t)$ の行列凸性と、境界条件を伴った、 $f(t)$ に対応するレウナー行列の条件付き負性や $t f(t)$ に対応するレウナー行列の条件付き正性とのサイズに関わる依存性、また関数 $f(t)$ の行列単調性と、境界条件を伴った、 $t f(t)$ に対応するレウナー行列の条件付き負性や、 $t^2 f(t)$ に対応するレウナー行列の条件付き正性とのサイズに関わる依存性や、また有限区間での行列(作用素)単調性の同値な条件などを与えました。

以上の研究成果については、国内外からの招待講演や特別講演などの機会が与えられ、十分な評価が得られています。

また、大学院生の日高氏との共同研究では、Audenaertにより得られたKwong行列の半正定値性についての最新の結果(特徴付け)を適用し、Kwong行列の条件付き負性の特徴づけを得ました。また、べき関数に対するKwong行列の条件付き負性とその行列サイズとの関係を与えました。

大学院生の橋氏との共同研究では、一般化Kwong行列および一般化Loewner行列を考察し、作用素単調関数に対しはそれらが半正定値であることを、関数の積分表示の累次積分表示を用いることで証明を与えました。これらの結果は、正の実軸上で定義された作用素単調関数 $f$ に対し $f(t^p)^{1/p}$ も作用素単調であるという安藤の結果の一部別証明として見なすことができる結果です。

(2) ヤングの意味で互いに共役な関数の組に対するヤング不等式に着目して、正線形汎関数の中でトレースの特徴づけを大学院生との共著論文で著しました。

(3) 可逆な作用素が、ユニタリ作用素であ

るという特徴付けとして、作用素それ自身およびその逆の作用素ノルムが1以下であるということが知られています。また、同様の結果が数域半径についても成り立つことは Stampfli の結果として知られています。内山敦氏との共同研究では、安藤による数域半径的縮小作用素の特徴づけを用い、Stampfli の結果の初等的な証明を与えました。一般化数域に対する安藤-Li による、更なる拡張も本研究後に示されています。また、ムーア・ペンローズ一般化逆を考えることにより、可逆性という設定を緩め、ユニタリー作用素と零作用素の直和であるという特徴付けを大学院生の伊藤・佐藤氏との共著論文として著しました。

(4) Bhatia-内山充による方程式解の導出を一般化し、作用素単調関数の逆関数に対するフレッシュ微分により与えられる方程式の解を、作用素単調関数の積分表示を用いて明示的に与えました。適用例としてダイソンの公式などに関わる方程式の考察を行いました。これは、日合-幸崎により知られた解表示に対する新たな導出法でもあり、またスペクトルの条件が一般的で、正作用素ではない場合も扱っており、彼らの一般化として見なすことができます。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- ① T. Sano, Fréchet derivatives for operator monotone functions, to appear in *Linear Algebra and its Application*, 査読有  
DOI: 10.1016/j.laa.2013.05.018  
<http://www.sciencedirect.com/science/journal/00243795>
- ② H. Ito, T. Sano, Y. Sato, Numerical radius of Moore-Penrose inverse, to appear in *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有  
<http://www.jams.or.jp/notice/scmjol/>
- ③ T. Sano, S. Tachibana, On Loewner and Kwong matrices, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 75, 2012, 335-338, 査読有  
<http://www.jams.or.jp/notice/scmjol/>
- ④ C. Hidaka, T. Sano, Conditional negativity of anti-Loewner matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 60, 2012, 1265-1270, 査読有  
DOI:10.1080/03081087.2011.627858
- ⑤ F. Hiai, T. Sano, Loewner matrices of matrix convex and monotone functions, *J. Math. Soc. Japan*, 64, 2012, 343-364,

査読有

DOI:10.2969/jmsj/06420343

- ⑥ R. Bhatia, T. Sano, Positivity and conditional positivity of Loewner matrices, *Positivity*, 14, 2010, 421-430, 査読有  
DOI: 10.1007/s11117-009-0027-2
- ⑦ T. Sano, A. Uchiyama, Numerical radius and unitarity, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 76, 2010, 581-584, 査読有  
<http://acta.fyx.hu/acta/home.action?noDataSet=true>
- ⑧ R. Bhatia, T. Sano, Loewner matrices and operator convexity, *Math. Annalen*, 344, 2009, 703-716, 査読有  
DOI: 10.1007/s00208-008-0323-3
- ⑨ K. Cho, T. Sano, Young's inequality and trace, *Linear Algebra and its Application*, 431, 2009, 1218-1222, 査読有  
DOI:10.1016/j.laa.2009.04.016

[学会発表] (計13件)

- ① 佐野 隆志, Loewner and Kwong matrices, *Matrices and Operators in honor of sixtieth birthday of Rajendra Bhatia*, 2012/12/30、インド・バンガロール IISc
- ② 佐野 隆志, Semi-operator monotonicity and derivatives for operator monotone functions, 研究集会「幾何学及び確率論的手法による作用素の構造解析の研究」、2012/11/6、京都大学数理解析研究所
- ③ 佐野 隆志, Loewner and anti-Loewner matrices, *Positive Matrices and Operators: Recent Developments and Advances*, 2012/06/26、韓国・テグ Kyungpook National University
- ④ 佐野 隆志, Around Loewner matrices, 日本数学会関数解析学特別講演、2012/03/27 東京理科大学
- ⑤ 日高 知佳良、佐野 隆志, Anti-Loewner matrices: Numerical radius and unitarity, 研究集会「スペクトル、数域などの作用素の幾何的特性量を用いた作用素の構造研究」、2011/11/16 京都大学数理解析研究所
- ⑥ 日高 知佳良、佐野 隆志, Anti-Loewner matrices について、作用素論・作用素環論研究集会: 2011/11/04 琉球大学
- ⑦ 日高 知佳良、佐野 隆志, Kwong 行列について、研究集会「バナッハ空間論の研究とその周辺」、2011/2/14 京都大学数理解析研究所
- ⑧ 佐野 隆志, Loewner 行列について、作用素論・作用素環論研究集会、2010/11/13 東京理科大学

- ⑨ 佐野 隆志、行列凸性や行列単調性とレウナー行列、研究集会「作用素論における非可換構造とその応用」、2010/10/29 京都大学数理解析研究所
- ⑩ 佐野 隆志、Loewner matrices and matrix convexity, 16th Conference of the International Linear Algebra Society, 2010/6/22、イタリア・ピサ
- ⑪ 佐野 隆志、Operator monotone functions and Loewner matrices, ICTP Summer School and Advanced Workshop on Trends and Developments in Linear Algebra, 2009/6/29、イタリア・トリエステ
- ⑫ 佐野 隆志、Loewner 行列について、日本数学会東北支部会特別講演、2009/2/21、東北大学
- ⑬ 佐野 隆志、Matrix inequalities and trace、インド・ラマニュジャン数学会、2008/5/21、インド・カンプール

[図書] (計2件)

- ① マトリックスの世界 (共立出版)、佐野 隆志、2013、176 + xi ページ
- ② マトリックスの世界 (共立出版)、佐野 隆志、2009、178 + xi ページ

[その他]

ホームページ等

<http://www-sci.yamagata-u.ac.jp/soumu/seeds/matSeedsFiles/sano.pdf>

<http://www-sci.kj.yamagata-u.ac.jp/English/GenInfo/Members/ResearchProfiles/Math/SANO.pdf>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐野 隆志 (SANO TAKASHI)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：20250912