

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 20 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540153

研究課題名（和文） 古典的不等式の精密化と非線形退化楕円型方程式論への応用

研究課題名（英文） On the improvement of classical inequalities and its applications to nonlinear degenerate elliptic equations

研究代表者

堀内 利郎（HORIUCHI Toshio）

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：80157057

研究成果の概要（和文）：

- (1) 古典的なハーディ・ソボレフ型の精密化され、可算無限個の精密なミッシング・タームと最良定数が決定された。
- (2) 精密化された古典的不等式を用いて非線形問題が研究され成果をあげた。
- (3) 線形化法により C-K-N 型不等式に関連するエネルギー最小解の対称性の破れが起こるメカニズムの解明がなされた。
- (4) 関数 $p(x)$ を指数とするオーリッツ空間上での作用素のハーディ型不等式を用いた解析が行われた。

研究成果の概要（英文）：(1) The classical Hardy-Sobolev inequalities were improved by finding out sharp missing terms and the best constants. (2) By making effective use of the improved Hardy-Sobolev inequalities, nonlinear problems were successfully studied. (3) By a linearization method the symmetry breaking of the Caffarelli-Khon-Nirenberg type inequalities were investigated to make clear its mechanism. (4) The operators on the Orlicz with a variable exponent $p(x)$ were studied using the Hardy inequalities.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：重み付きソボレフ不等式、重み付きハーディ不等式、CKN 型不等式、ミッシング・ターム、退化楕円型方程式、非線形変分問題

1. 研究開始当初の背景
ハーディ型、ソボレフ型、レリッヒ型、及び、それらを複合した一連の古典的な不等式の改良の可能性とその重要性は古くから認識されてきた。非常に有名なブレイクスルーには、83年に H. R. Brezis, L. Nirenberg

が精密化したソボレフ不等式を用いてクリティカルな増大度をもつ半線形楕円型方程式の正值解の存在を示した仕事、97年に H.L.Brezis, J.L. Vazques が精密化したハーディ不等式を用いて半線形楕円型方程式の解の爆発を考察した仕事などがある。その後

もこの方面の研究は盛んであり、国内では本研究グループが中心となり研究が意欲的に進められてきた。特に近年、本研究グループにより古典的不等式のミッシング・タームの研究が集中的に遂行され多くの成果を得ている。このように本研究は、我々のこれまでの研究の直接の延長線上にあり、以下に述べるように非線形楕円型偏微分作用素の研究の大きな進展が期待できる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、国内外において近年目覚しく発展しているハーディの不等式やソボレフの不等式に代表される古典的不等式の精密化の研究を一層進展させ、精密化された種々の不等式の応用を共通の手法として非線形退化楕円型方程式に関する諸問題を、分担者が専門分野間の有機的関係を深めながら、本質的な進展を目指して共同研究を行うことにある。

具体的には次の6つの関連する研究を本質的に発展させるのが目的である。

(1) 古典的不等式のミッシング・タームの研究：古典的な不等式の精密化を試みる。昨年度までの研究の結果、既にハーディ・ソボレフの不等式や高階レリッヒの不等式の精密化に成功しているので今年度からは重み付きの場合と通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた場合を中心に研究する。これらの場合には、いわゆる関数の球対称再構成が一般には成立しないので、それにかわる精密な議論が必要となり、それ自体実解析的にも興味深い研究といえる。重みつきハーディ・ソボレフ・レリッヒ型不等式に対して、任意有限個のミッシング・タームの存在が完全に証明されることも期待されている。

(2) 精密化された古典的不等式の非線形楕円型作用素の解析への直接的応用：精密化された重み付きハーディ・ソボレフ不等式と通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた不等式を非線形楕円型作用素の解析に応用する。前者は非線形変分問題を線形化して得られる非線形作用素の第一固有値と深く関連し、後者は磁場付きシュレディンガー作用素のスペクトル解析に不可欠である。特に第一固有値が非負になるための必要十分条件の考察がなされる予定である。また、精密化されたハーディ・ソボレフ・レリッヒ不等式の直接応用として重みつき p 重調和作用素の固有値問題

等が議論される予定である。

(3) 準線形楕円型偏微分作用素の線形化法による解析：準線形楕円型作用素を、最も基本的な解である最小解で線形化すれば、退化線形化作用素が得られるが、定義域の違い等から従来の陰関数定理や分岐理論は適用できない。そこで精密化な重み付きハーディ・ソボレフ不等式から得られる最小解の弱い安定性（第一固有値の非負性）に着目し、退化楕円型方程式の理論を応用することで最小解に関する精緻な分岐理論を構築し、それを足がかりに準線形退化楕円型方程式の古典解の存在や弱解の安定性に関する研究を進める。尚、このテーマは昨年までの P -調和作用素に関する研究の延長線上にある。

(4) 準線形退化楕円型方程式の特異解の構造研究：目的は準線形退化楕円型方程式の特異解の構造研究を行うことである。昨年度まで燃焼型方程式の爆発解をプロトタイプとして特異解の存在とその爆発に至る過程が解析されてきた。この研究は変分問題が非有界関数やディラック測度などの特異極値関数を持つ場合の理論構成を目指している。この問題に対するオイラー・ラグランジュ方程式は準線形退化楕円型方程式となる。そこで上記3の研究を応用し特異解の構造解析をする。具体的には、重み付きソボレフ不等式の極値関数決定、変分問題の特異解での線型化問題が研究される予定である。

(5) 退化楕円型作用素のスペクトルの研究：上記問題とも関連し、逆問題も視野に入れスペクトルの解析を行う。特にどのような条件でスペクトルが離散的になり、また固有関数がなめらかとなるのか等の基本的な事項を実解析的な手法で研究する。最近精密化されたハーディーの不等式や様々な空間での特異積分が突破口となることが期待されている。これを受けて P -重調和作用素を含む一般的な枠組みで、様々な特異解のプロフィールの解析を行う。

(6) 退化楕円型作用素のポテンシャル論的研究：退化楕円型作用素のポテンシャル論的研究はまだ成果が少なく、本研究の大きな目的の1つである。その理由は基本解やパラメトリックスが通常の空間では解析が困難であることが挙げられるが、ここでは様々な重み

つき空間やオーリッツ空間上での解析を試みる。また、キャパシティやコンテンツ等の研究を行い、解の特異性を測るために応用する。

3. 研究の方法

先ず、各年度を通して古典的な不等式（ハーディ、ソボレフ、レリッヒ型、及び、これらの複合型の不等式）の精密化に関する研究が行われた。特に重みつきの場合を合わせて考察した。これらの研究と同時に「精密化された不等式等を共通の手法」とし、非線形退化楕円型作用素に関する諸問題を分担者・連携研究者・海外の研究協力者が専門分野間の有機的関係を深めながら進展を目指して共同研究を行った。具体的には次の6つの関連する研究を本質的に発展させた。4年にわたるので、20年度（初年度）に関し詳しく述べ、以降は簡単な補足に留める事にする。尚、各課題の具体的担当者は最後に記述されている。

研究計画・方法（平成20年度）

第1の問題：古典的不等式のミッシング・タームの研究：古典的な不等式の本質的な精密化を試みるが、既にハーディ・ソボレフの不等式や高階レリッヒの不等式のある程度の精密化に成功しているため、重み付きの場合と通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた場合を中心に研究した。特に多くの古典的不等式が無限個の項からなる精密なミッシング・タームを持つことが示された。

第2の問題：精密化された古典的不等式の非線形楕円型作用素の解析への直接的応用：精密化された重み付きハーディ・ソボレフ不等式は非線形変分問題を線形化して得られる非線形作用素の第一固有値と深くかかわる。このことを用い、第一固有値が非負になるための必要十分条件や重みつき p 重調和作用素の固有値問題等が議論された。また通常のグラディエントを磁場付きに置き換えた不等式を応用し磁場付きシュレディンガー作用素のスペクトル解析を、スウェーデンの研究協力者とも協力し、ある程度遂行された。

第3の問題：準線形楕円型偏微分作用素の線形化法による解析：準線形退化楕円型方程式の解の解析をする上で作用素の線形化からアプローチを試みることは自然かつ重要な問題で

あると考えられてきたが、準線形作用素を安易に線形化すれば様々な退化楕円型作用素があらわれてしまう。昨年度までの我々の研究で、 P -調和作用素を含む一連の準線形作用素の最小解や第一固有関数における線形化作用素の解析が進められ、最小解等の弱い安定性と退化楕円型方程式の理論を応用することで最小解等に関する精緻な分岐理論やBlow-up理論が構築されつつある。それらを踏まえて、準線形退化楕円型方程式の線形化法による研究が本格的に推進された。この研究の最も困難な点は、線形化作用素と元の準線形作用素の定義域の違い等から従来の陰関数定理や分岐理論は適応できないことにあるが、昨年までの最小解や第一固有関数の安定性に着目した研究を応用し、この困難を克服した。さらに、この理論を高階作用素に発展させ線形化解析を確立させるべく研究された。また特異解における作用素の線形化解析はまだ始まったばかりの領域であり非常に興味深い分野である。

第4の問題：準線形退化楕円型方程式の特異解の構造研究：昨年度まで燃焼型方程式の爆発解をプロトタイプとして特異解の存在とその爆発に至る過程が解析されてきた。これを受けて準線形退化楕円型方程式の特異解の構造研究を、 P -重調和作用素を含む一般的な枠組みでクリティカルな増大度の非線形項を持つ場合を中心に様々な特異解のプロフィールの解析を行った。この研究では、特異解において線形化して得られる内部退化楕円型作用素のスペクトル解析が不可欠であるが、最近精密化された古典的不等式や様々な空間での特異積分が突破口となった。

第5の問題：退化楕円型作用素のスペクトルの研究：準線形作用素を線形化して自然に得られる退化楕円型作用素を、どのような場合に作用素の近似と考えることができるのかは未解決で重要な問題である。本研究はこの大問題の解決を目標にして、退化楕円型作用素のスペクトルという視点から研究を行うものである。具体的には、どのような条件でスペクトルが離散的になり、また固有関数が有界性や正則性と有するか等の基本的な事項を実解析的な手法で研究した。

第6の問題：退化楕円型作用素のポテンシャ

ル論的研究：様々な重みつき空間やオーリッツ空間上での解析を試みた。さらに、キャパシティやコンテンツ等の研究を行い、解の特異性を測るために応用することが試みられた。

研究計画・方法（平成21年度以降）

基本的には前年と同じであるが、平成20年度の進展状況を見て修正を加えた。上に述べた研究項目の中には既に一定の成果をあげているものもあったが、それらを含めて平成20-23年度で実施された。また、平成23年度で完了しない場合には引き続き研究を継続する予定である。

4. 研究成果

(1) 古典的不等式のミッシング・タームの研究：古典的なハーディー・ソボレフ型の精密化が研究された。可算無限の精密なミッシング・タームと最良定数が求められ、さらに一般化された対数関数 (super-logarithm) を導入する事により最終的な解決への突破口が解明された。また、レリッヒ型の場合も研究が開始された。昨年度、CKN型の不等式がすべての指数の場合に拡張されたのを受け、それらのミッシング・タームの研究も開始された。

(2) 精密化された古典的不等式の非線形楕円型作用素の解析への直接的応用：可算個のミッシング・タームの和をポテンシャルとする退化楕円型作用素の境界値問題と非線形問題が研究された。その事により逆にsuper-logarithm を特徴づける事に成功した。

(3) 準線形楕円型作用素の線形化法による解析：最小解や第一固有関数の安定性に着目した研究を発展させ、C-K-N型不等式に関連するエネルギー最小解の対称性の破れが起こることがほぼ完全に示され、そのメカニズムの解明がある程度なされた。同時に、等周不等式の対称性の崩れがおこる事が証明された。

(4) 準線形退化楕円型方程式の特異解の構造研究：準線形退化楕円型方程式の特異解のプロフィールのシュミレーションと解析の準備が進められた。

(5) 退化楕円型作用素のスペクトルの研究：準線形作用素を線形化して得られる退化楕円型作用素について、どのような条件でスペクトルが離散的になり、固有関数が有界性や正則性と有するか等を実解析的な手法で研究が進められた。

(6) 退化楕円型作用素のポテンシャル論的研究：関数 $p(x)$ を指数とする重みつき空間やオーリッツ空間上での作用素のハーディ型不等式を用いた解析が行われ多くの成果を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① T. Horiuchi, P. Kumulin The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities involving critical and supercritical weights, Proceedings of the Japan Academy, Vol. 88, Ser. A No.1, pp1-6 (2012), 査読有
- ② E. Nakai, T. Yoneda, Riesz transforms on generalized Hardy spaces and a uniqueness theorem for the Navier-Stokes equations., Hokkaido Math. J. 40-1, 67-88 (2011), 査読有
- ③ Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ono, T. Simomura Boundedness of fractional integral operators on Morrey spaces and Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials, J. Math. Soc. Japan, 62-3, 707-744, (2010), 査読有
- ④ L. Maligranda, E. Nakai, Pointwise multipliers of Orlicz spaces, Arch. Math. (Basel), 95-3, 251-256, (2010), 査読有
- ⑤ E. Nakai, Singular and fractional integral operators on Campanato spaces with variable growth conditions, Rev. Mat. Complut., 23-2, 355-381, (2010), 査読有
- ⑥ K. Shimomura, Hiroshima Caloric morphisms for rotation invariant metrics, Math. J. 40-3, 315-331, (2010), 査読有
- ⑦ T. Horiuchi, Kato's inequalities for degenerate quasilinear elliptic operators, Kungpook Mathematical J. 48-1, 15-24, (2008), 査読有

[学会発表] (計5件)

- ① T. Horiuchi, On the Symmetry breaking of the non-critical Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities by a linearization method, 日本数学会 2012

年, 3月 27日 東京

②安藤広、堀内利郎、中井英一、重み付きハーディの不等式の精密化に付いて、日本数学会 2012年, 3月 27日 東京

③安藤広、堀内利郎、中井英一、Construction of slowly increasing functions

日本数学会 2012年, 3月 29日 東京

④ T, Horiuchi, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities involving Critical and Supercritical weights, 姫路研究集会、2009年, 2月 21日 姫路

⑤①T, Horiuchi, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg type inequalities involving Critical and Supercritical weights, 日本数学会 2008年, 9月 24日 東京

6. 研究組織

(1) 研究代表者

堀内 利郎 (HORIUCHI TOSHIO)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：80157057

(2) 研究分担者

大西 和榮 (ONISHI KAZUEI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：20078554

下村 勝孝 (SHIMOMURA KATUNORI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：00201559

中井 英一 (NAKAI EIICHI)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：60259900

安藤 広 (ANDO HIROSHI)
茨城大学・理学部・講師
研究者番号：60292471

山上 滋 (YAMAGAMI SHIGERU)
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：9017565

(3) 連携研究者

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)
兵庫県立大学・教授
研究者番号：40211544

立沢 一哉 (TACHIZAWA KAZUYA)
北海道大学・理学研究科・教授
研究者番号：80227090

佐藤 得志 (SATO TOKUSHI)
東北大学・理学研究科・助教
研究者番号：00261545