

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540156

研究課題名（和文）順序付きノルム空間の数域作用素空間への埋め込み

研究課題名（英文）Embedding of ordered normed spaces into numerical radius operator spaces

研究代表者

伊藤 隆 (ITOHI TAKASHI)

群馬大学・教育学部・教授

研究者番号：40193495

研究成果の概要（和文）：一般のノルム空間をヒルベルト空間上の作用素のなす空間（作用素空間）へ埋め込めるが、ノルム空間が順序を有する場合、順序とノルムの両方を保存して埋め込むことは、一般には成功していない。そこで正值性を保存するために、埋め込みと可換な作用素の研究が必要となった。本研究では、特に埋め込みと可換（テンソルの形）なテープリッツ作用素のなすテープリッツ環の重層構造（アップワードルッキング位相）を解析し、極大イデアルの形を決定した。

研究成果の概要（英文）：A normed space can be embeddable into an operator space, which consists of operators on a Hilbert space. However, if the normed space has an order, it has not been obtained the embedding with preserving both norm and order. Then it is needed to study operators commuting with the embedding in order to hold the positivity. In this study, we determine the form of the maximal ideals in Toeplitz algebras whose generators commute with the embedding as the tensor form, by analyzing the multi-structure of upward-looking topology for Toeplitz algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	500,000	150,000	650,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：作用素空間、数域半径作用素空間、ノルム空間、完全有界性、完全正值性、行列作用素システム

1. 研究開始当初の背景

1988年、Z. J. Ruan : Subspaces of C^* -algebras, J. Funct. Anal. 76 によって導入された作用素空間の概念は、作用素環論のみならず、関数解析学全般にわたる新しい視点を与えた。

ここでいう作用素空間とは、(抽象的) 作用素空間と(具体的) 作用素空間の2つの側面をもつ。X を複素ベクトル空間とし、 $M_n(X)$ を X 上の $n \times n$ 行列全体のなすベクトル空間とする。また、ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素のなす空間を $B(H)$ 、 $M_n(B(H))$ におけるノルム $\| \cdot \|_n$ を $B(H \oplus \cdots \oplus H)$ の

作用素ノルムとする。

(抽象的) 作用素空間 X とは、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、2つの条件 (直和に関し最大ノルムがそのノルムになること及びスカラー行列との積に自然なノルム不等式を持つこと) を満たす $M_n(X)$ 上のノルム $On(\cdot)$ を有する複素ベクトル空間である。 $B(H)$ の部分空間 Y (これを具体的作用素空間と呼ぶ) は、 $M_n(Y) \subset B(H \oplus \cdots \oplus H)$ であるから、明らかに Ruan の公理を満たす。Ruan は、次を示した。

定理 (Ruan, 1988) X が作用素空間ならば、 (X, On) から $(B(H), \|\cdot\|_n)$ の中への完全有界線形写像 Φ で完全等距離なもの $\|\Phi([x_{ij}])\|_n = On([x_{ij}])$, $[x_{ij}] \in M_n(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ が存在する。(Φ を埋め込みと呼ぶ。)

ここで、 Φ が完全有界とは、 $\|\Phi\|_{cb} := \sup\{\|\Phi([x_{ij}])\|_n \mid On([x_{ij}]) \leq 1, \forall n\} < \infty$ のときを言う。

上記のような $M_n(X)$ 上の行列の重層構造から定義されるノルムを用いて $B(H)$ への X の特徴を保存した埋め込み、特に、順序を有するノルム空間の順序を保存した $B(H)$ への埋め込みに関しては、その存在の有無が問題となってきた。

任意のノルム空間 X に対して、 X を作用素空間とする多様なノルムの列の存在 (言い換えるといろいろな $B(H)$ への埋め込み) は得られている。しかしながら、 X が順序をもつ作用素空間 (例えば C^* -環やその双対空間) の場合、Ruan の構成法では、ノルムを完全等距離の意味で保存しても、順序構造は保存しない。実際、 $*$ (Involution)すら保存しない。

これに対し、私と渚 (千葉大) は、論文 Numerical radius on operator spaces, J. London Math. Soc. (2006) の中で、数域半径作用素空間を導入し、その後、 $*$ を保存する埋め込みの構成に成功した。目標とする研究課題は、上記論文に続いて得られた $*$ 付きのノルム空間の埋め込みをさらに発展させ、順序付きのノルム空間を数域半径作用素空間の自己共役な部分空間として表現することである。

ここで、数域半径作用素空間 X とは、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、Ruan の条件に類似の2条件 (スカラー行列との積に関する不等式では Ruan の条件を緩めた) を満たす $M_n(X)$ 上のノルム $Wn(\cdot)$ を有する複素ベクトル空間である。

$w(\cdot)$ を $B(H)$ 上の数域半径 $w(x) = \sup\{|\langle x, \xi \rangle| \mid \|\xi\| = 1, \xi \in H\}$ 、 $w_n(\cdot)$ を

$B(H \oplus \cdots \oplus H)$ の数域半径とする。このとき、次が成立する。

定理 (Itoh, Nagisa 2006)

1) X が数域半径作用素空間ならば、 (X, Wn) から $(B(H), w_n)$ の中への完全有界写像 Ψ で完全等距離なもの

$w_n([\Psi(x_{ij})]) = Wn([x_{ij}])$ $[x_{ij}] \in M_n(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

が存在する。

2) X が作用素空間ならば、非可算無限個の異なる数域半径作用素空間への埋め込みを持つ。

つまり、作用素空間の背後にある多様な数域半径作用素空間の存在を示したことになる。

以上の研究を受けて、順序を保存する埋め込みの研究が期待されて来た。

2. 研究の目的

$B(H)$ における行列の重層構造を用いた2つの重要な概念として完全正值性と完全有界性 (完全等距離) がある。

70年代 Choi と Effros は、順序構造を持ったノルム空間が $B(H)$ の中に順序を保ったまま埋め込む概念として行列作用素システムを導入した。しかしこの場合、順序構造は保存するがノルムに関する情報は得られない (無いといってもよい)。

一方、80年代末 Blecher-Paulsen によって [ノルム空間と有界線形作用素] のカテゴリを [作用素空間と完全有界線形写像] の部分カテゴリと見なす2つのファンクター Minn (最小作用素空間ノルム) と Maxn (最大作用素空間ノルム) の存在が示された。

例えば、 m 次元 ℓ_1 空間 $[\ell_1^m]$ と表記する] の Minn と Maxn を用いた作用素空間への埋め込みは、それぞれ $\ell_1^m = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mid \alpha_i \in \mathbb{C}\}$ に対し、1次元トーラス S^1 の m 個の直積空間上の連続関数環を $C(S^1 \times \cdots \times S^1)$ 、 z_i を $S^1 \times \cdots \times S^1$ 上の座標関数、 m 個の生成元 $\{g_i\}$ をもつ自由群 F_m から生成される C^* -環を $C^*(F_m)$ 、 $\{U_i\}$ を $C^*(F_m)$ のユニタリー生成元とすると

$\ell_1^m \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_m z_m \in C(S^1 \times \cdots \times S^1)$

$\ell_1^m \ni (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto \alpha_1 U_1 + \cdots + \alpha_m U_m \in C^*(F_m)$

といった作用素空間として全く異なる (完全等距離でない) 埋め込みを得る。

そこでまず初めの目標として、有限次元可換 C^* -環 ℓ_∞^m の双対空間 ℓ_1^m の具体的な表

現 (完全正值かつ完全等距離) を構成することを挙げた。 ℓ_1 は作用素空間としての表現で上記のように $C(S_1 \times \cdots \times S_1)$ や $C^*(F_m)$ に埋め込まれる。しかし完全等距離のみで完全正值ではない。正值性を考察する上で新しい視点が必要となろうが、行列作用素システムと作用素空間で互いに扱うことができなかつた性質 (行列作用素システムでは、完全有界性。作用素空間では、完全正值性) を再考する必要がある。Choi, Effros の視点に立ち返り、具体的な作用素を用いた表現にアプローチすることが必要となる。そして行列作用素システムと作用素空間を統合した表現を構成することを図る。この方策は、Pisier によって提出された作用素空間的ヒルベルト空間 $\mathcal{O}H$ の埋め込み問題にも直接、接近する視点である。

作用素環やその双対空間 (その他諸々の付随する空間) は、順序構造を持つ一方、その埋め込みは、 $*$ や順序構造を保存してない。この事実は、長年の不満であり、表現定理としては、不十分に感じる点であった。私は、作用素空間 (順序構造が壊れている) と行列作用素システム (ノルムがよくない) の構造を統合することを一連の研究のゴールと設定した。

少なくとも数域半径作用素空間として最大数域半径ノルム W_{\max} を用いると、 $*$ を保存する表現定理になっており、この最大数域作用素空間 (W_{\max} を導入した作用素空間) がその候補として上げられる。

次に ℓ_2 の $B(H)$ への埋め込みを考察することが重要となる。目標とする埋め込みは順序を保存するものであるから作用素空間的ヒルベルト空間 $\mathcal{O}\ell_2$ が考察の対象になった。

当初の研究テーマを達成するため、具体的なノルム空間における完全等距離かつ完全正值な表現を構成し、その一般化を目指すこととした。そして最終的に、順序を有するノルム空間の完全等距離かつ完全正值な $B(H)$ への埋め込みの構築を目的とした。

3. 研究の方法

順序を有するノルム空間の順序を保存した $B(H)$ への埋め込みを得られれば目標を達成できるわけであるが、この研究の鍵の1つは、行列の重層構造をもった双対空間 $M_n(A^*)$ に適切な duality を導入することにある。これまで、 $M_n(A^*) \ni [f_{ij}]$ には少なくとも次の4通りの方法が考察されてきている。

(1) $M_n(A^*) = M_n(A)^*$ [Lance, 1976]

(2) 行列の積を用いた方法 [Christensen-Sinclair 1987]

(3) Trace を用いた方法 [Itoh 1988], [cf. Haagerup-Itoh 1995]

(4) クロネッカー積を用いた方法 [Effros-Ruan], [Blecher-Paulsen 1991]

これ以外に、行列作用素システムとしての $M_n(A^*)$ の順序構造を変えずに、新たなノルムを導入する方法がある。実際、Schur 積を用いた順序が(1) (3) (4) のそれと同じ順序構造であることを確認している。完全有界線形写像の意味が異なってくるが、この写像のクラスは全く未開の部分でもあるので、新たな埋め込みを得ることも含め、方針の1つとして試みた。

また具体的な空間 $\mathcal{O}\ell_2$ に関し、2007 年 6 月末 C. I. R. M. での Haagerup-Musat による Effros-Ruan 予想(1988 年) の解決の報告の中で次の不等式が提出された。

$T : B(H) \rightarrow \mathcal{O}\ell_2$ が $\|T\|_{cb} \leq 1 \iff \|T(x)\|_2 \leq p(x^*x)^{1/2} p(x^*x)^{1/2}$ となる状態 p が存在する。

この不等式は、Itoh-Nagisa により導入された C^* -環 A のテンソル積 $A \otimes A$ 上の数域半径 Haagerup ノルム $\| \cdot \|_{wh}$ と強い関連をもつ。実際 $A \otimes_{wh} A$ の双対空間を特徴づける不等式として、次の同値性を得た。

$(A \otimes_{wh} A)^* \ni T$ が $\|T\|_{wh} \leq 1 \iff |T(x, y)| \leq p(x^*x)^{1/2} p(y^*y)^{1/2}$ となる状態 p が存在する。

作用素空間と数域半径作用素空間の違いも dual の言葉で表現すれば、有界性をコントロールする状態が数域半径作用素空間では1つ (作用素空間では2つ必要) で制御できる点があげられる。背景に Khinchine の不等式が見え隠れするのだが、まだ模糊とした部分も多くこのテンソル積の dual の視点から調べなくてはならない。 ℓ_2 の具体的な数域半径作用素空間への表現の構成を実現を試みた。

さらに上記研究方向に関連して、Adji, Raeburn によって導入された全順序可換群に付随したテープリッツ環のイデアル構造の考察が新たに必要になってきた。実際、完全有界写像としての表現を重層構造の中でとらえると環としての表現と可換な作用素

が現れ、とくに数域半径作用素空間の典型例を作る場合に、ユニタリーでない等距離作用素とのテンソル表現が重要であることがわかったからである。

Adji, Raeburn によるアップワードルッキング位相が、テンソル積を作った時のノルムの評価に影響を与えることから、その位相を新たな観点から見直し、テープリッツ環のイデアル構造、特に極大イデアルの記述を試みた。

4. 研究成果

順序を有するノルム空間の完全等距離かつ完全正値な $B(H)$ への埋め込みに関しては、部分的な結果のみで最終形には至っていないが、埋め込みと可換となるテープリッツ作用素に関しては、まとまった次の研究成果が得られた。

G を全順序可換離散群とする。 G の順序イデアルに対し、包含関係で順序を導入したものを $\Sigma(G)$ とする。 $\Sigma(G)$ の元 (順序イデアル) の双対全体を $X(G)$ とする。

$X(G)$ とテープリッツ環 $T(G)$ の原始イデアル空間 $\text{Prim}(T(G))$ の間には一対一対応がある。 $\text{Prim}(T(G))$ 上の hull-kernel 位相をこの対応で引き戻したものがアップワードルッキング位相である。

この位相は、Adji-Raeburn によって導入されたが、その極限は、扱いにくいものであった。

そこでまず、

1) $X(G)$ 上のアップワードルッキング位相の開基の形を決定した。

次に、通常の各点収束位相と比較し、

2) 各点収束位相とアップワードルッキング位相の差異を示した。

一方、双対の一部ではなく全体をみると差異は現れず、

3) G の双対群上の各点収束位相と双対アップワードルッキング位相が一致することを示した。

そして、 $\text{Prim}(T(G))$ の構造の解析と上記位相の結果を用いることにより、

4) G を全順序可換離散群で $\Sigma(G)$ が鎖になる場合、 $\text{Prim}(T(G))$ の極大イデアルの形を決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ①著者: Rizky Rosjanuardi, Takashi Itoh
論文標題: Characterization of maximal primitive ideals of Toeplitz algebras
雑誌名: Scientiae Mathematicae Japonicae
査読: 有
巻: 72
発行年: 2010
ページ: 393-397

[学会発表] (計1件)

- ①学会: 日本数学会
日時: 2010年9月24日午前の部
会場: 名古屋大学東山キャンパス
発表者: Rizky Rosjanuardi, Takashi Itoh
講演: Characterization of maximal primitive ideals of Toeplitz algebras

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 隆 (ITOH TAKASHI)
群馬大学・教育学部・教授
研究者番号: 40193495

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

渚 勝 (NAGISA MASARU)
千葉大学・理学部・教授
研究者番号: 50189172