

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月15日現在

機関番号：12611

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540157

研究課題名（和文）

偏微分方程式とトモグラフィの超局所解析的ならびに離散的方法による研究

研究課題名（英文） Study of partial differential equations and tomography by microlocal and discrete methods.

研究代表者

金子 晃 (KANEKO AKIRA)

お茶の水女子大学・名誉教授

研究者番号：30011654

研究成果の概要（和文）：偏微分方程式とトモグラフィの種々の問題の超局所解析的や離散的方法での研究を目指したが、中でも、離散的方法を有効に発展させ成果を得た。対数型非線型項を持つ半線型熱方程式の爆発の臨界指数を一般放物型領域で決定したこと、2方向投影データのトモグラフィの解の非一意性の構造研究の手段である解集合のスイッチンググラフについて位数20以下の数え挙げを理論的定理と計算機による実験で達成したことなどが主な成果である。

研究成果の概要（英文）：We studied on various problems of partial differential equations and tomography by means of microlocal and discrete approach. Especially we got new interesting results on the critical exponent of blowup of semilinear heat equation with logarithmic nonlinearity by determining the critical exponent for generalized paraboloidal domain, and on the switching graph of solution sets of 2 projection tomography which is a means of studying non-uniqueness of solution, by enumerating them up to order 20 with aid of theoretical consideration and computer experiment.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：代数解析, 偏微分方程式, トモグラフィ, 半線型熱方程式, 藤田現象, 爆発の臨界指数, 2方向投影データトモグラフィ, 電荷分布の形状同定

1. 研究開始当初の背景

半線型熱方程式の正值解の時間大域的存否に関する藤田型現象とは、パラメータのある値を境としてそれより上では十分小さな初期値に対して時間大域解が存在するのに対し、それより下では、どんなに小さな初期

値から出発しても解は有限時間で領域のある点で無限大に発散する。というものであり、種々の状況でこの境目の臨界指数を求める研究は長年に渡りいろんな成果を挙げたが、非線型項に対数関数を含むものは本研究代表者が研究を始める以前には取り扱わ

れていなかった。本研究代表者はこの科研費採択前に、抽象的な臨界指数の存在を示していたが、その値を特定の領域に対して具体的に求めることが興味深い問題となっていた。2方向投影データからの図形の復元については長い研究の歴史があり、本研究代表者が導入した、解の集合に対するグラフ構造は以前にも独立に導入した人がいたが、その構造の本格的な研究と分類はあまり行われていなかった。本研究代表者は、この科研費が採択される前にスイッチンググラフの構造についていろいろな興味深い性質を見出していたが、まだ多くの未解決予想が残っていた。また、スイッチンググラフの例は散発的なものに止まっていた。

その他、幾何学的逆問題や超局所解析についても研究されていない新しい問題がいくつか存在していた。

2. 研究の目的

本研究は、上記の諸問題に対して本研究代表者の以前の研究を引き継ぎ、新たな具体的な成果を挙げることを目的とした。

3. 研究の方法

関連分野の研究集会への参加を有効に利用し、また講演のための出張を依頼して、国内外の関連分野の研究者と交流し情報交換し、研究を進めるためのヒントを得た。参考になる情報が書かれた書籍を購入し利用した。部品を購入して価格効果の高い自作計算機を組み立て、それをを用いて数値実験や解の探索を行い、結果を予想するのに利用した。成果の一部を発表しフィードバックを得る目的で、共同研究者の院生とともに研究会参加のための旅行をした。

4. 研究成果

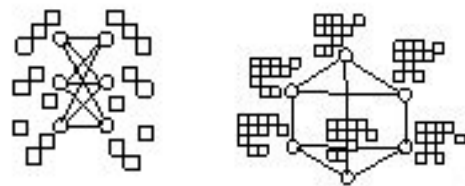
半線型熱方程式に対数型非線型項 $u/(1-\log u)^p$ ($0 < u < 1$), $u(1+\log u)^{p+1}$ を採用したものの解の一般化放物型領域 $x_n > (|x_1|^{2+...+|x_{n-1}|^2})^{q/2}$ での爆発の臨界指数が $p=2/(q-1)$ となることを博士課程院生の西川史恵との共同研究でつきとめ、厳密な証明を論文として印刷公表した。この研究では、未知函数に関する方程式の斉次性が一切使えないため、優解や劣解を直接構成する方法を開発した。この方法は簡明であり、Levine-Meier による開錐の場合の冪型非線型項の臨界指数の導出もこれででき、易しい新証明となることを示すこともできた。錐の場合は通常の極座標による変数分離で優解が具体的に書けるが、放物型領域の場合は、これを適当な座標変換により半円柱に写して、断面方向と軸方向に変数分離し $\text{cexp}(-at^{\lambda} - r^2/bt) \phi(y')$ の形で優解を

求めた。こちらは真の解を一つでも上から抑えればよいのだが、劣解の方はすべての解を無限まで延びる境界付近で下から抑えるのは困難なので、Levine-Meier が開発した、爆発を定常解のスペクトル挙動に翻訳した補題を、劣解の形に一般化したものを用意し、この定常問題の劣解を上と同様の形で具体的に求めることにより示した。その後、冪指数が座標ごとに異なるようなより一般の放物型領域については、比較定理を用いて、最も大きい指数で臨界指数が決まることも突き止め、日本数学会の秋季総合分科会で報告した。さらに、その後の研究で、開凸錐を上記のような一般放物面で摂動した領域で、冪指数と対数函数冪の積を非線型項とする方程式を考えると、冪指数を Levine-Meier が求めた臨界指数に固定すれば、対数冪が上記の臨界指数のところを境として藤田現象が現れることを突き止めた。この証明は上の結果において導入された直接比較法を発展させて行った。

2方向投影データからの平面図形の再構成問題については、博士課程院生の長浜里奈との共同研究で、解集合のスイッチンググラフを位数20までの数え上げに成功し、印刷公表した。計算機による数え上げを正当化するため、位数 n のスイッチンググラフは必ず $n \times n$ 以下のセル内の図形で実現できるという定理を用意した。各位数に対する同型類の個数だけを示せば、2(1), 3(1), 4(2), 5(2), 6(4), 7(2), 8(4), 9(3), 10(5), 11(3), 12(9), 13(4), 14(4), 15(6), 16(8), 17(4), 18(9), 19(5), 20(12)。下に位数20のときの分類結果を示す。

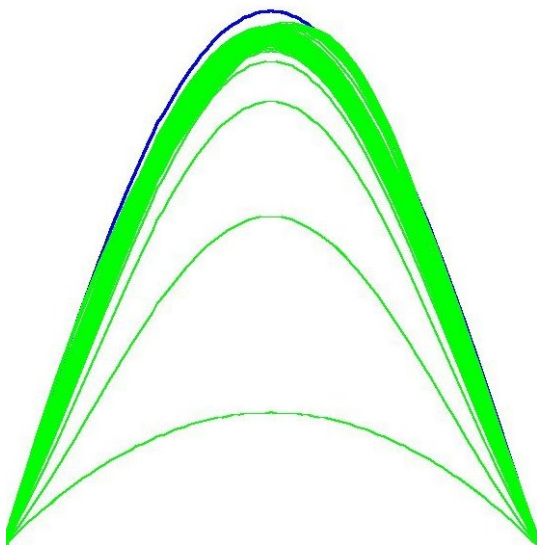
K_{20} (20-1) 190 edges	$K_{10} \times (2)$ (20-2) 100 edges	$Z_{2,3}$ (20-3) 90 edges	$S_{2,25}$ (20-4) 88 edges	$S_{3,2,1} \approx S_{3,1,2,4}$ (20-5) 78 edges
$J_{3,2}$ (20-6) 70 edges	$Z_{3,2} \times (2)$ (20-7) 70 edges	$K_5 \times K_4$ (20-8) 70 edges	$S_{3,3} \times (2)$ (20-9) 64 edges	$S_{2,2} \times K_4$ (20-10) 62 edges
$K_5 \times (2) \times (2)$ (20-11) 60 edges	$S_{2,2} \times (2) \times (2)$ (20-12) 52 edges			

この中には、辺の個数が一致しても同型でないものもある。例えば、位数6の場合、完全2部グラフと位数2,3の直積はともに辺数9で、さらにどちらも次数3の正則グラフであるが、同型でない(下図)。



このため、同型かどうかの判定は、各頂点での次数まで一致した場合は、今のところ個別に行っている。また、一般的に位数が合成数の方がいろんな構成法が適用できて種類が増えるようだが、素数でも適用できる組み合わせ構成法もあるので、その差がそう顕著ではないのも興味深い。この数え上げの過程で、スイッチンググラフの多くの組み立て規則と、興味深い無限系列の例をいくつか発見した。引き続き研究でこの数え上げから有効な一般的定理のさらなる抽出を鋭意行っており、スイッチンググラフの完全な特徴付けを最終的目指して研究を継続している。

幾何学的逆問題の研究の一つとして、修士課程院生の兼重利子との共同研究で、一様な電荷密度 1 を持つ形状未知の曲線が空間に作る静電ポテンシャルをそこから離れた 1 次元区間で観測した値から、もとの形状を決定する問題を考察した。電荷分布が定める静電ポテンシャル場の式を曲線の定義方程式に対する積分方程式と見なし、逆に解くのだが、非線型の難しい方程式になるので、まずニュートン法により数値的に求める実験を行った。猛烈に非適切だが、両端固定(既知)、および自由(未知)の場合と星状型の閉曲線のそれぞれについて、いくつかのモデルを仮定し、元の曲線に近い初期推定値から出発すると、予想以上に良い再構成結果が得られた。ただし、反復回数を多くしてゆくと収束せず振動する現象が現れることも有り、反復法の力学系的性質の研究が必要なことが示唆された。下の図は計算結果の一例である。青線がモデルとして設定した真の解 $\sin \pi x$ 、緑線が初期推定値 $x(1-x)$ から出発し、分割数 100、正則化パラメータ 0.01 で 100 回 Newton 法の反復実行したものを順次重ね描きしている。



数学的な一意性については研究中である。ただし同様の設定で、曲面状の一樣電荷分布が定める静電ポテンシャル場を面で観測した値からもとの曲面を推定する問題については、超局所解析的手法により数学的一意性を示すことができた。理論的には曲面の同定は非適切性についても曲線のときよりはゆるいようであるが、実際の数値計算では、有限要素法を用いた時間のかかる計算となるので、計算資源の制約からあまり細かな分割が使えなかったのが、数値実験ではこの差をはっきりと示すところまではゆけなかったが、計算環境を工夫して実験を継続している。以上の結果は学科のテクニカルレポートとして公表済みであるが、細部を詰めてしかるべき専門誌に投稿する予定である。

以上の研究の過程で、空間曲線の運動や曲率の数値計算とその逆問題の重要性に気付く研究を始めたが、その応用として顔認証やオンライン筆跡鑑定技術の改良を試みた。また、本研究の計算機実験のために購入した計算機の環境設定と動作スペックのチェックをかねて、非静力学モデルを Linux 上でメイクし六甲山系の季節風のシミュレーションを行ったり、完全準同型暗号の実用性検証などの重い計算をやらせてみたが、こうして得た副次的な成果についても意義があると考え、適当な研究会で発表した。最後に、本研究を通して必要となった計算機プログラムの開発のための学生の指導を通して得たノウハウを、数値計算の教科書として出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

①Akira Kaneko, Shie Nishikawa: Critical exponent of blowup for heat equation with logarithmic nonlinearity on paraboloidal domain, 査読有,

Nat. Sci. Report Ochanomizu Univ.60-1 (2009), 1-13.

②Akira Kaneko, Rina Nagahama :

Enumeration of switching graphs of small orders, 査読有 , Nat. Sci. Report Ochanomizu Univ. 60-1 (2009), 31-44.

③Akira KANEKO, Toshiko Kaneshige:

Identification of the Shape of Curvilinear Charge Distribution, 査読無, Technical Report OCHA-IS 10-1, pp. 1-5.

④Akira Kaneko, Shie Nishikawa: Second Critical Exponent of Blowup for Heat Equation with Power-Logarithm Nonlinearity on Paraboloidally Perturbed Conical Domain, 査読

無, Technical Report OCHA-IS 11-2, pp.1-6.

[学会発表] (計6件)

①金子晃, 西川史恵, 『対数型非線型項を持つ非線型熱方程式の一般化された爆発の臨界指数の決定

』, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月27日, 大阪大学(大阪府)

②玉田竜子, 金子晃, 口唇の動きを利用した顔画像による顔認証システム, SCIS2010, 2010年1月19日, 香川県高松市サンポート,

③内藤章子, 金子晃, NP問題と概零知識証明, SCIS2010, 2010年1月20日, 香川県高松市サンポート,

④余田史絵, 金子晃, Ubuntu Linuxでの気象庁Nhмのメイクと六甲おろしのシミュレーション, 第13回非静力学モデルに関するワークショップ, 2011年10月14日, 長岡技術科大学(新潟県)

⑤柴田絢子, 粕川正充, 金子晃, 空間曲線の曲率のオンライン筆跡鑑定への応用, SCIS2012, 2012年1月30日, 金沢エクセルホテル東急(石川県)

⑥中村蓉子, 粕川正充, 金子晃, 整数上の完全準同型暗号の実装実験, SCIS2012, 2012年2月1日, 金沢エクセルホテル東急(石川県)

[図書] (計1件)

① 金子晃, 数値計算講義, サイエンス社, 2009, 260ページ.

[その他]

ホームページ:

<http://www.kanenko.com/~kanenko/Preprint/pblist.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金子 晃 (KANEKO AKIRA)

お茶の水女子大学・

大学院人間文化成世科学研究科・教授
(2008-2010年度)

同・名誉教授(2011年度)

研究者番号: 30011654

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

無し