

機関番号：13301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540161

研究課題名（和文） 量子力学のプロパゲイターと経路積分に係わる研究

研究課題名（英文） Study on quantum mechanical propagators and path integrals

研究代表者

一瀬 孝 (ICHINOSE TAKASHI)

金沢大学・名誉教授

研究者番号：20024044

研究成果の概要（和文）：本研究は、量子力学のプロパゲイター、即ちシュレーディンガー・ユニタリ群とその積分核、グリーン関数、また、虚数時間版である半群とその熱核に関するものである。主に次の2つのトピックについて成果を得た。1つは、本研究で得た作用素ノルム自己共役 Trotter 積公式に基づいた経路積分的手法がシュレーディンガー半群、または、熱核の構成を如何に良い近似で与えているかを明らかにしたことであり、もう1つは、3つの相対論的シュレーディンガー作用素を考え新しい観点からの虚数時間経路積分の問題への再訪を行ったことである。

研究成果の概要（英文）：This research concerns the quantum-mechanical propagator, namely, the integral kernel of the Schrödinger unitary group, Green function as well as their imaginary-time version, the integral kernel of the Schrödinger semi-group and heat kernel. Results are obtained among others on the following two topics. One is to investigate how good an approximation is given to the integral kernel of the Schrödinger semi-group or heat kernel by path integral based on the operator-norm selfadjoint Trotter product formulas obtained, and the other is to revisit with some new aspects the problem on the imaginary-time path integral representation for three relativistic Schrödinger operators.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：量子力学，プロパゲイター，経路積分，グリーン関数，熱核，Trotter 積公式，相対論的シュレーディンガー作用素，ディラック作用素

## 1. 研究開始当初の背景

本研究課題の主なものであった次の3つ

(A) 量子力学のプロパゲイターを Trotter 積

公式の極限としてとらえる研究の継続等

(B) 非可換調和振動子の熱核を経てゼータ関数に関する研究

(C) 相対論的 Schrödinger 半群に関する虚数時間経路積分への再訪

の当初の状況は次であった。

(A) について、田村英男(岡山大学)との共著論文[Commun. Math. Phys. 2001], 及び、一瀬・田村英男・田村博志・Zagrebnoy [Commun. Math. Phys. 2001] において、自己共役 Trotter 積公式(Trotter-Kato 積公式)の作用素ノルム収束が証明されていた。これは、それ以前の、Rogava(グルジア)1993, B. Helffer(仏)1995 による嚆矢の結果、その後主に Schrödinger 作用素についての、Dia-Schatzman(仏), 一瀬・高信, 一瀬・田村英男, 百目鬼・一瀬・田村英男, Neidhardt-Zagrebnoy (独, 仏)等による改良をすべて含む究極的結果である。更に、一瀬・田村英男[Comm. PDE 2004, J. Reine Angew. Math. 2006]において、この積公式を滑らかなポテンシャル関数  $V(x)$  を持つ Schrödinger 作用素  $-\Delta + V$  に対する半群に適用した際、積分核が各点収束していることを発見した。従って、虚数時間プロパゲイターであるところの熱核の「経路積分」的構成を得ていた。

(B) については、一瀬は若山正人(九大数理)との共著論文[Commun. Math. Phys. 2005]において、非可換調和振動子  $Q$  に対するスペクトルゼータ関数が全複素平面に有理型関数として解析接続できること確立していた。

(C) 電磁場の中の相対論的古典粒子(質点)のハミルトニアン  $[(p-A(x))^2 + m^2]^{1/2} + V(x)$  を中点処方 Weyl 量子化した相対論的 Schrödinger 作用素について、半群の熱核の Lévy 過程経路空間上の測度による経路積分表示を Commun. Math. Phys. 1986 の論文(田村博志と共著)及び Diff. Eqn. Math. Phys.

[Internat. Press, Boston 1995]中の論文で与えていた。

## 2. 研究の目的

(A) 作用素ノルム Trotter 積公式の誤差評価に関する更なる知見を得ること。

(B) 我々のスペクトルゼータ関数が全複素平面に有理型関数として解析接続できることを証明した際に得た式の右辺の有限和を無限和に改良できないかを追求する。

(C) 3つの相異なる相対論的 Schrödinger 作用素を考える。1つ目は1で述べた一瀬・田村博志による Weyl 量子化相対論的 Schrödinger 作用素であり、2つ目は Iftimie-Mantoiu-Purice [Publ. RIMS Kyoto Univ. 2007]にて考案されたもの、3つ目は非相対論的 Schrödinger 作用素の  $1/2$  乗を経て定義されたものである。対応する3つの作用素半群の経路積分表示の問題を考察しそれらの違いを明らかにする。

## 3. 研究の方法

(A) については Schrödinger 作用素に関する具体例の色々な場合を調べる。

(B) 我々のスペクトルゼータ関数の式の右辺の和に現れる定数  $C_{\{Q, j\}}$  の  $j$  に関する漸近挙動を見定め無限和にしたときの収束が言えないかをみる。若山正人との共同研究で進めている問題である。

(C) については、Lévy 過程の諸性質に注目する。

## 4. 研究成果

(A) 作用素ノルム自己共役 Trotter 積公式の誤差評価に関して、一瀬は東嘉紀との共著論文[Integ. Equ. Oper. Theory (2008)]において次を証明した：調和振動子の場合に、対称

Trotter積の作用素ノルム及びその積分核が、一般の場合の対称Trotter積公式の最良誤差評価 $O(1/n)$ よりも更に良い誤差評価 $O(1/n^2)$ で収束する。証明は対称Trotter積の積分核を具体的に計算することにより、誤差を上下から評価するものであった。これは、田村英男との共同研究[Comm. PDE(2004)]において、一般の無限遠で多項式増大するポテンシャル $V(x)$ をもつSchrödinger作用素 $-\Delta+V(x)$ の場合で得た上からのみの誤差評価 $O(1/n^2)$ の結果の一部精密化であり、最良誤差評価に関する問題を決着させた。

それまでの(A)の研究成果の総合的サーヴェイを行った田村英男との共著論文を書いた。Mark Krein 生誕100年記念論文集 Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 190 (Birkhäuser 2009) に掲載された。

2010年7月にワシントン(Washington) DC, 米, 開催された「第10回国際会議 経路積分 2010」において、ポテンシャル関数 $V(x)$ をもつSchrödinger作用素 $-\Delta+V(x)$ に対するに半群・その積分核のTrotter積による近似が、それぞれノルム収束・各点収束することについて招待講演した。内容は、本研究の初年度までに、田村英男等との共同研究から東嘉紀との共著論文[Integ. Equ. Oper. Theory (2008)]までに得られた成果である。

(B) 非可換調和振動子 $Q$ の熱核を経てゼータ関数の展開式の問題についての続きの研究を始め、2008年9月ドイツのゴスラー(Goslar)で開催された国際会議「偏微分方程式とスペクトル理論」で、一瀬はこのテーマについて講演した。右辺の和を無限和にできないかという問題に係わる示唆に富む2質問があった。それに基づく検討を行ったが、やはりうまく行かず、係数 $C_{\{Q, j\}}$ は $j$ に依存して個数が増える有限個の積分の和で書けているが、複雑さ故にその評価は目下容易ではないよう

で未解決。とき熟するをしばし待ちたい。

(C)について、2で述べた3つの相対論的Schrödinger作用素に対する虚数時間経路積分表示の問題を考察した。また、3つの相対論的Schrödinger作用素は、一般には相異なるが定数磁場を与えるようなベクトルポテンシャルの場合には一致すること、及び、1つ目のWeyl量子化相対論的Schrödinger作用素以外はゲージ不変でもあることも注意した。この問題の最初の成果を2011年3月茨城大学「数理解析科学セミナー」で発表・講演した。

更に、廣島文生(九州大学), Jozsef Lőrinczi (Loughborough大学, 英) との共同研究を行った。相対論的Schrödinger方程式を含む一般のLaplace作用素のBernstein関数で与えられるLévy過程の生成作用素たち、更にスカラー・ベクトルポテンシャル、及び、spinを持つ相対論的Schrödinger作用素たちの半群に対する(Lévy過程測度による)経路積分表示をsubordination/time changeの手法によって確立した。論文を投稿中である。

その他、一瀬は斉藤義美(Alabama 大学 Birmingham 校, 米)との共同研究で, Dirac作用素のゼロモードに係わるDirac-Sobolev空間の問題を考察を行い、ふつうのSobolev空間とどのような関係にあるかを解明した論文を書いた[Funkcialaj Ekvacioj 2010]。尚, Dirac作用素に係わる, ベクトル値関数に対するImproved Sobolev embedding theoremsに関する共同研究を継続中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計4件)

①経路積分入門---{経路積分, 特に, 虚数時間の場合について}---

RIMS 共同研究『経路積分と超局所解析の入門』数理解析研究所講究録 1723, pp. 1-22, 京都大学数理解析研究所, 2011年1月, 査読無

② Ichinose, T., Saito, Y., Dirac--Sobolev spaces and Sobolev spaces, Funkcialaj Ekvacioj, 53(2010), 291-310, 査読有

③ Ichinose, T., Tamura, H., Results on Convergence in norm of exponential product formulas and pointwise of the corresponding integral kernels, Operator Theory and Related Topics, Modern Analysis and Applications

[The Mark Krein Centenary Conference (Odessa, Ukraine, April 2007)], Vol.1, Birkhäuser, 2009, 315-328, 査読有

④ 一瀬 孝, Azuma, Y., Ichinose, T., Note on norm and pointwise convergence of exponential products and their integral kernels for the harmonic oscillator, Integral Equations Operator Theory, 60 (2008), 151--176, 査読有

[学会発表] (計6件)

① 一瀬 孝, 磁場付き相対論的 Hamiltonian の3つの量子化と虚数時間経路積分, 茨城大学「数理解科学セミナー」(代表者: 曾我日出夫), 2011年3月10日, 茨城大学教育学部(茨城県)

② Ichinose, T., On convergence in norm for exponential product formulas and pointwise for integral kernels --- with path integral in mind, The 10th Conference Path Integrals 2010, 2010年7月13, Howard University, Washington DC (USA)

③ 一瀬 孝, 経路積分入門---{経路積分, 特に, 虚数時間の場合}---

RIMS 共同研究『経路積分と超局所解析の入門』(代表者: 熊ノ郷直人), 2010年5月25日, 京都大学数理解析研究所(京都府)

④ 一瀬 孝, 経路積分 I, II, Encounter with Mathematics 52, 「経路積分の数学的基礎 ---いつまでも新しい Feynman の発明 ---」の企画と講演, 2010年1月8日, 9日, 中央大学理工学部数学教室(東京都) (1月8日(120分), 9日(60分)両日講演)

⑤ 廣島文生, 一瀬孝, J.Lörinzi, Laplacian の Bernstein 関数で定義される Schrödinger 作用素の経路積分, 2009日本数学会 秋季総合分科会, 函数解析学分科会 一般講演 2009年9月24日, 大阪大学理学研究科(大阪府)

⑥ Ichinose, T., Problems on the spectral zeta functions for non-commutative harmonic oscillators, International Conference on Partial Differential Equations and Spectral Theory, 2008年9月3日, Goslar (Germany)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

一瀬 孝 (ICHINOSE TAKASHI)  
金沢大学・名誉教授  
研究者番号: 20024044

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし