

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 14 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540162

研究課題名（和文） 確率場を用いた量子統計力学の研究

研究課題名（英文） Research of quantum statistical mechanics in terms of random fields

研究代表者

田村 博志（TAMURA HIROSHI）

金沢大学・機械工学系・教授

研究者番号：80188440

研究成果の概要（和文）：物理的に興味のある様々なボーズ気体系のボーズ・アインシュタイン凝縮[BEC]状態における粒子分布を確率(点)場の観点から調べた。弱い調和外力によって閉じ込められた平均場相互作用をしている気体系では、BEC であるか否かで、弱外場極限での分布に大きな違いが出る事が判明した。異なったスケールから見ることによりこの違いにおける BEC の役割が明確になった。

極端な非対称的な容器内の理想気体系では、通常の BEC の他に第 2, 3 種の BEC 状態が起こるが、そこでの粒子分布を調べた。

また、BEC 状態の理想気体系における大偏差原理などの極限定理を導いた。

研究成果の概要（英文）：Various physically interesting systems of boson gas are investigated by means of the Random (Point) Fields.

For a model of a mean-field interacting boson gas trapped by a weak harmonic potential, it is shown that in the Weak Harmonic Trap limit there are two phases which are different from each other in the local density: finite in one phase and divergent in another phase. The mechanism of the divergence is considered in the different scale using random field, which makes the role of BEC clear.

For the perfect Bose-gas trapped in extremely anisotropic boxes, quasi BEC states as well as usual BEC occur. We investigated particle distribution in these cases.

Limit theorems on the particle distribution, including the large deviation principle, are also established for the ideal boson gas in BEC.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数理物理学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析, 統計力学, 確率場, Bose-Einstein 凝縮

1. 研究開始当初の背景

量子統計力学は、現代物理学の基礎であるとともに現在の科学技術全般を支える基礎理論である。それを数学的に厳密に定式化することは現代数学の一つの責務であり、またその努力は新たな数学理論を生み出す源であるだろう。

現在の量子統計力学の数学的定式化の主な方法として次のものが挙げられる：① KMS 条件を満たす作用素環の状態の理論② Euclidean formalism③ Random Point Field [RPF] を用いる方法。本研究では、③ RPF の方法を用いて、上記の①②の方法では取り扱いが困難であるが、座視することが出来ない重要かつ興味ある問題である

「Bose-Einstein 凝縮 [BEC] 状態にある気体の構成粒子の位置分布の研究」に取り組んだ。なお当初、研究テーマとして「複合粒子ガスの研究」も挙げていたが、これに関しては（問題の難しさの故）進展は無かった。

2. 研究の目的

本研究では、BEC 状態にある気体の構成粒子の位置分布を次の3つの場合について考える。

(1) BEC 状態にある自由な理想気体の密度のゆらぎに関する大偏差原理等の極限定理の導出：この場合の構成粒子の位置分布を与える RPF は、通常の（よく知られた）Boson Point Field ともう一つ別種の RPF との（測度としての）畳み込みとして、気体が d 次元ユークリッド空間全体に充満するという理想的状態（熱力学的極限）において既に与えられている。ここでは、この RPF のもとで、直径 L の立方体の内部に含まれる粒子の数とその立方体の体積の比（経験密度）に関する大数の法則（経験密度がその RPF による平均値に殆んど確実に収束すること）と中心極限定理（経験密度とその期待値の差と立方体の体積に関連したパラメータとの比の分布が標準 Gauss 分布に収束すること）及び大偏差原理（経験密度とその期待値の差と立方体の体積に関連したパラメータとの比が大きくなる確率が指数関数的に小さくなること）を導く。

(2) 調和外力で閉じ込められた平均場相互作用する粒子によって構成される気体の BEC 状態：これは通常の実験的狀況を反映したモデルで多数の粒子が空間の一部の領域に外力によって閉じ込められているとして、その平均密度（粒子数とその領域の体積との比）を一定にしたまま粒子数を無限にする極限を考える。この極限における構成粒子の微視的な位置分布を記述する RPF を求めその性質を調べる。また、期待の閉じ込めら

れた領域を全体としてみる立場からスケール変換によって関連した確率場 [RF] を構成する。これによって、微視的な粒子の分布と巨視的な密度分布との両面から全体像を明らかにする。

(3) 極度に非等方的な容器内の気体の BEC 状態：直方体の2辺の長さが他の1辺に対し指数関数的に長い擬似2次元容器内の理想気体 [SLAB 系] と、1辺の長さが他の2辺の長さの平方となっている擬似1次元容器内の理想気体 [BEAM 系] を考える。これらの系では通常の BEC 状態以外の準 BEC 状態も存在することが知られている。(2) と同様に平均密度一定の条件の下で容器を大きくする極限での RPF 及び、スケール変換によって得られる RF を構成する。ここでは、容器に2種類の典型的な長さがある為、スケール変換もそれぞれ2種類を考える。これらを同時に調べることでこの系の性質の全体像を明らかにする。

3. 研究の方法

(1) については、既に求めておいた母関数 (RPF の Laplace 変換) の、テスト関数を L だけスケールすることによる変化を L を無限大にする極限で調べる。このため通常の熱核とボーズ統計に現れる変形された熱核との差の局所的 trace norm による評価が重要である。また、大偏差原理の導出には母関数から Legendre-Fenchel 変換を用いて rate 関数を求める。

(2) については先ず、統計力学の大正準集団を用いて RPF を構成し、熱力学的極限に相当する外力を弱くする極限での RPF を測度の弱極限として求める。これによって平均密度一定の下での無限粒子数極限が得られる。また、弱外力極限を行うと同時に状態空間 (ユークリッド空間) のスケール変換を行うことによって、巨視的な粒子の密度分布を与える RF を求める。こうして得られた極限の RPF 及び RF の性質を、外力を含んだ Hamiltonian の基底状態との関連で調べる。そのために、熱核を基底状態への作用と基底状態の直行補空間における作用を表す部分とに分け、補空間の部分の冪もとの熱核の冪との差の局所作用素ノルムによる評価を用いる。

(3) については、(2) と同様、大正準集団を用いて、有界容器内での RPF を構成し、平均密度一定の下で容器を無限に大きくする極限 (熱力学的極限) によって、全空間内の RPF を測度の弱極限として求める。また、熱力学的極限と状態空間のスケール変換を同時に行い巨視的な密度分布を与える RF を求めるのであるが、ここでは、SLAB 系と BEAM 系のそれぞれにおいて2つの長さのス

ケールがあることに関連してそれぞれ2種類のスケール変換を用い対応する2つのRFを導入しておく。境界条件の寄与を明らかにするためDirichlet境界条件を課す。

4. 研究成果

(1) d 次元空間全体に充満する理想気体の粒子分布の大偏差原理については、一辺 L の立方体内の気体の経験密度が、 L に関する冪が $d-2$ であるパラメータに関する大偏差原理を満たすことが示された。これは、BEC状態でない場合は L に関する冪が d であるパラメータに関する大偏差原理が得られている点に主な違いがある。中心極限定理に関しても経験密度とその平均をスケールする分散に相当する量が BEC 状態の場合は L の $(d+2)/2$ 乗となり、通常の場合の指数 $d/2$ と異なった結果が得られた。今まで BEC 状態では協同現象がマクロに起こるためこれら分散などの量に違いが現れることが定性的直感的に理解されて来たが、ここでの結果は、その理解を定量的かつ厳密なものに高めた点に意義があると考えられる。

[雑誌論文③]

(2) 調和外力によって閉じ込められた Boson ガスの平均場理論の弱外場極限では、化学ポテンシャルが小さい通常の (non BEC) 状態では、構成粒子の位置分布は理想気体のそれと同じ RPF によって与えられることが示された。一方、BEC 状態では、密度の発散を示す RPF の挙動が見られ、理想気体との大きな違いが現れた。この違いを物理的に解釈するため、物理系を巨視的に見る立場から、一般の RF も併用して解析を行った。この RF は RPF にたいし弱外場極限を取る時、同時にスケール変換を施して得られるもので、Boson ガスの構成粒子の位置分布を巨視的な観点から(密度分布として)与えるものである。こうして得られた RF は、確定的(non Random)な分布を持ち、巨視的な密度揺らぎが無いことが示された。また、得られた分布の表式には、与えた外場の下での Hamiltonian の基底状態からの寄与が明らかであり、系の中心近くには基底状態の波動関数の最大振幅に相当する盛り上がりが見える。これが微視的粒子分布の密度の発散を与えているものと解釈される。数学的に理想化された簡単なモデルではあるが、実験の特徴もある程度捉えることに成功していると考えられる。また、巨視的な分布を与える RF の母関数が一粒子量子力学系の準古典理論との関連が見やすい形で得られている。この関連を利用すれば、一般的な外場の下での Boson ガスの平均場理論に対してもこの議論を拡張することが、準古典理論を用いることで可能であると思われる。

[雑誌論文②④]

(3) 非等方的な容器に閉じ込められた Boson ガスについては、先行した研究によって SLAB 系では非凝縮状態と通常(第1種)の BEC の他に第3種の BEC 状態の3つの相があり、また BEAM 系では非凝縮状態と第2種 BEC 状態の2相が起こることが知られている。ここではそれら各々の状態における粒子の位置分布を調べ、知られている等方的な場合との違いを明確にした。具体的には、本研究では構成粒子の位置分布を3つのスケールから調べるため、それぞれのスケールに対応する RPF 及び RF を求めた。ここで言う3つのスケールとは、微視的スケール(各々の粒子の位置分布を RPF によって調べる)と巨視的スケール(粒子の密度分布を長い辺を単位として RF で記述する)及び、中間的スケール(粒子の密度分布を短い辺を単位として RF で記述する)であり、SLAB に対しては微視的スケールでは粒子の位置分布は等方的な容器内のそれと同じ RPF によって与えられ、巨視的及び中間的スケールでの粒子の密度分布は確定的(non Random)なものとなった。これら3つの観点を総合して、SLAB 系の3つの相の定性的相違が記述された。(どれか2つのスケールのみを見たのでは3つの相の違いは明らかとならない。)一方、BEAM 系についても、この系の持つ2つの相の定性的な性質の違いが得られた。微視的スケールでは粒子の位置分布は等方的な容器内のそれと同じ RPF によって与えられ、中間的スケールでは、粒子の密度分布は確定的(non Random)なものとなった。一方、第2種 BEC 状態では、巨視的スケールにおける粒子密度分布に非自明な統計性(randomness)が見出された。これも直感的には予想されていた事だが、具体的に粒子の位置分布が与えられたのは初めてである。また、確定的な密度分布の場合も、与えた境界条件の下で1粒子量子系の基底状態の波動関数からの寄与が明白になっている点も興味深い。[雑誌論文①]

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Tamura, H., Zagrebnov, V. A., Random point field approach to analysis of anisotropic Bose-Einstein condensations, to appear in Markov Processes and Related Fields (jubilation issue for the 80th birthday of R.A. Minlos), (掲載確定), 査読有
- ② Tamura, H., Boson Gas Mean Field Model Trapped by Weak Harmonic Potentials in Mesoscopic Scaling, RIMS Kokyuroku

- Bessatsu B21 (2010), 163-181, 査読有
- ③ Tamura, H., Zagrebnov, V. A., Large deviation principle for noninteracting boson random point processes, J. Math. Phys. 51, 023528 (2010) (20 pages), 査読有
 - ④ Tamura, H., Zagrebnov, V.A.. Mean field interacting boson random point fields in weak harmonic traps, J. Math. Phys. 50, 023301 (2009) (28 pages), 査読有

[学会発表] (計4件)

- ① 田村博志, Random point fields, random measures and Bose-Einstein condensation, Symposium "Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory" 2009.11.27, 九州大学西新プラザ (福岡県)
- ② 田村博志, Boson gas mean field models trapped by weak harmonic potentials in mesoscopic scaling, 繰り込み群の数理科学での応用, 2009. 9. 9, 京都大学理学部 3号館127号室 (京都府)
- ③ Tamura, H., Bose Gases in Scaled Harmonic Traps in terms of Random Point Fields, XVI International Congress on Mathematical Physics, 2009.6.6., the Clarion Congress Hotel Prague (Czech Republic)
- ④ Tamura, H., The Bose-Einstein Condensations and the Random Point Fields, Workshop "Quantum many-body systems: Bose-Einstein condensation", 2008.10.1, Centre de recherches Mathematiques, Universite de Montreal (Canada)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田村 博志 (TAMURA HIROAHI)
金沢大学・機械工学系・教授
研究者番号：80188440

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

伊東 恵一 (ITOU KEIICHI)
摂南大学・理工学部・教授
研究者番号：50268489