

機関番号：14101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540165

研究課題名（和文） 双曲型と分散型方程式に対する局所平滑化評価式の研究とその応用

研究課題名（英文） Local smoothing estimates for hyperbolic and dispersive equations and applications

研究代表者

肥田野 久二男 (KUNIO HIDANO)

三重大学・教育学部・准教授

研究者番号：00285090

研究成果の概要（和文）：障害物の外部における波動方程式の初期・境界値問題の解が満たす時間と空間について大域的な Strichartz 型評価式を得ました。その応用として空間 3 次元の場合に、障害物の外部における半線形波動方程式の初期・境界値問題に対する小さな解の時間大域一意存在に関する結果を得ました。また、時間と空間の両方の変数に依存する係数をもつ 2 階の波動方程式の解が満たす時空 L^2 評価式の導出を行ないました。その評価式は、球対称でなめらかさの低い初期値をもつ準線形波動方程式の初期値問題の適切性の証明に応用され新しい結果を得ました。

研究成果の概要（英文）：Abstract Strichartz estimates have been obtained for wave equations outside obstacles. As an application, the global (in time) existence of small solutions to semilinear wave equations with power-type nonlinear terms has been proved in 3-D domain outside obstacles.

Weighted space-time L^2 estimates have been also obtained for wave equations with space-time dependent variable coefficients. As an application, some new results on local (in time) wellposedness have been proved for quasilinear wave equations with low regularity radial data.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：関数方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：Strichartz 型評価式，波動方程式，局所平滑化評価式

1. 研究開始当初の背景

本研究課題の申請時、私は平成 18, 19 年度科学研究費補助金の研究課題に沿って、Schrödinger 方程式の球対称解に対する重みつき Strichartz 型評価式の研究で一定の成果を上げていました。また当時は米国 UCLA の Rowan Killip, Terence Tao, Monica Visan や

Shuanglin Shao のプレプリントでも球対称解に対する新しい評価式が得られた頃でした。自分自身のそれまでの成果を土台にしたり、彼らの成果に刺激されたりして、分散型方程式や波動方程式の新しい局所平滑化評価式の導出に努めたいという研究動機を持っていました。

また、なめらかさの低い初期値をもつときの準線形波動方程式の Cauchy 問題に対する適切性に関する研究への応用を念頭に入れて、定数係数波動方程式に対しては既に得られていたある重みつき時空 L^2 評価式と類似の評価式を、変数係数をもつ波動方程式の場合にも得ることが出来ないかということも研究動機でした。

2. 研究の目的

(1) 本研究課題の申請時における研究の目的は、2 階の双曲型波動方程式や分散型方程式の解の局所平滑化を表す新しい評価式を、とくに球対称な解の場合に限定して得ることでした。球対称解に対しては、Strichartz 型評価式が成り立つルベグ空間の指数の範囲を一般の場合と比べて広く改良でき、また一般の場合には成り立たないような重みつき Strichartz 型評価式が成り立つことが徐々に分かってきていたからです。

また、いわゆる逆 2 乗型ポテンシャルをもつ波動方程式と Schrödinger 方程式の球対称解に対する Strichartz 型評価式の研究も行ない、球対称解に対しては、評価式が成り立つルベグ空間の指数を、一般の場合よりも上げられるかを調べることも研究の目的でした。

(2) 定数係数の波動方程式の解に対する Morawetz-Keel-Smith-Sogge-Hidano-Yokoyama 型の重みつき時空 L^2 評価式を、変数係数をもつ 2 階の双曲型波動方程式の解に対して拡張することも研究の目的でした。

(3) このような評価式の応用として、なめらかさの低い球対称な初期値をもつ非線形 Schrödinger 方程式と準線形波動方程式の Cauchy 問題に対する時間局所的または大域的な一意解の存在の問題に適用することも研究の目的でした。

3. 研究の方法

(1) Jason Metcalfe 氏 (University of North Carolina, Chapel Hill), Hart F. Smith 氏 (University of Washington), Christopher D. Sogge 氏 (Johns Hopkins University), Yi Zhou 氏 (Fudan University) と共同で、障害物の外部における波動方程式の初期・境界値問題の解が満たす時空大域的 Strichartz 型評価式の研究を行ないました。

(2) Chengbo Wang 氏 (Johns Hopkins University), 横山和義氏 (北海道工業大学) と共同で、時間と空間の両方の変数に依存した係数をもつ 2 階の波動方程式の解が満たす Morawetz-Keel-Smith-Sogge-Hidano-Yokoyama 型評価式の導出の研究を行ないました。これは定数係数の場合には既に得られていた、解の減衰と平滑化を表現する評価式を変数係数の場合に拡張しようという試みでした。定数係数の場合に用いられた尺度変換に

よる工夫が変数係数の場合にはうまく機能しないことが困難な点でした。

Jason Metcalfe 氏と Christopher D. Sogge 氏は、2005 年に発表された論文の中で障害物の外部における波動方程式の初期・境界値問題を研究しました。彼らは定数係数の方程式の場合に用いられていた Igor Rodnianski 氏の方法を変数係数の方程式の場合に一般化することに成功し、外部領域での問題設定で変数係数をもつ波動方程式の解が満たす時空 L^2 評価式の導出に成功しました。これにより全空間での問題を考えていた私たちが行なうべきことは、尺度変換を用いた工夫を経由しないで空間原点の近くで望ましい時空 L^2 評価式を導くことでした。幸いにも Metcalfe 氏から大変に役立つ助言を頂けて、上述した私たちの試みが完遂されました。

4. 研究成果

(1) Metcalfe 氏, Smith 氏, Sogge 氏, Zhou 氏と共同で、適当な条件を満たす障害物の外部における波動方程式の初期・境界値問題の解が満たす時空大域的な抽象化された Strichartz 型評価式を得ました。その応用として、Fritz John による空間 3 次元における半線形波動方程式の初期値問題に対する小さな解の時間大域一意存在に関する古典の仕事を外領域の場合に拡張することに成功しました。John の仕事を外領域の場合に拡張することは、非線形波動方程式を外領域で解析する道を開拓し、現在も第一線級で活躍している日本の解析学者もかつて試みたそうです。今回の研究成果は、その未解決問題の解決であり、数学雑誌 Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 362, No. 5 (2010), 2789–2809 に掲載されました。

なお、同様の結果が空間次元 2 の場合にも成り立つことが期待されます。後になって、Smith, Sogge, Wang により解決されました。空間次元が 4 の場合は Du, Metcalfe, Sogge, Zhou の共同研究により 2008 年に解決済みでしたが、空間次元が 5 以上の場合は未解決で、今後の進展が期待されます。

(2) Wang 氏と横山氏と共同で、時間と空間の両方の変数に依存し適当な条件を満たした係数をもつ 2 階の双曲型波動方程式の解が満たす時空 L^2 評価式の導出を Cauchy 問題の枠組みで行ないました。その評価式は球対称でなめらかさの低い初期値をもつときの準線形波動方程式の初期値問題に対する適切性の問題に応用されて、半線形の方程式に対しては既知であった結果が準線形の方程式の場合にまで拡張されました。

すなわち、空間 3 次元のときに球対称で小さな初期値については、なめらかさが低く ($H^2 \times H^1$ -class), 空間遠方での減衰

がゆっくりであっても、「ほとんど時間大域的」に一意解が存在する (almost global existence) という思いがけない成果を得ることが出来ました。先行する多くの結果においては、なめらかさの指数がもっと高い重み付きのソボレフノルムを用いて初期値の小ささを仮定していました。私たちの結果は、初期値のなめらかさと空間遠方での減衰条件という2点から先行結果を見直すきっかけになるのではないかと考えています。

また私たちは差分商の方法を用いて、準線形波動方程式の解の2階の偏導関数が $L^2(\mathbb{R}^3)$ 値関数として時間変数に関して連続であるという極めて非自明な性質も示すことが出来ました。準線形波動方程式を逐次近似の方法で解く際に発生する「微分の損失」のために、このような性質を示すことは容易ではありません。既存の一般論では取り扱えない、なめらかさの低い解の枠組みで2階の偏導関数の時間変数に関する連続性を示すことに成功したことは特筆すべきことであります。

なお、本成果を収めた論文は2010年4月に数学雑誌に投稿されて、掲載の可否の知らせを待っています。

(3) Wang氏と横山氏と共同で、非線形項が1階の偏導関数の絶対値のべき乗の形をもつ波動方程式 (たとえば $\Box u = |u_t|^p$) の初期値問題の解の最大存在時間 (lifespan) を下から評価する研究も行ないました。1981年に出版された論文で、Fritz Johnは空間次元 n の値が3で p の値が2のときには非自明な古典解は時間大域的には存在しないことを示しました。なぜこのようなことが起こるのか知るために、この成果は直ちに日本の増田久弥教授や米国 Indiana 大学の Robert Glassey 教授の研究グループにより、 n, p が他の値の場合への一般化が試みられました。そして Glassey は Mathematical Reviews 誌において Thomas C. Sideris のある論文に対する評論のなかで、 n を2以上とするとき $1 < p < 1 + 2/(n-1)$ のときは小さな初期値に対してすら非自明な解は時間大域的には存在せず、他方 $p > 1 + 2/(n-1)$ のときは小さな初期値に対しては時間大域解の存在が示されるであろうと予想しました。

$1 < p < 1 + 2/(n-1)$ のときの大域解の非存在に関しては、1980年代中ごろに Jack Schaeffer と Mohammad Rammaha により優れた部分的成果が得られ、そして2001年に出版された Yi Zhou の論文の中で結果が完成されました。

この論文の中で、Zhou は解の最大存在時間の上からの評価も得ており、その評価が最良であるかも問題になっていました。

また $p > 1 + 2/(n-1)$ のときの小さな初期値に対する時間大域解の存在に関しては、 n の値が2と3のときに限り本執筆者と津田谷公利氏

の共著論文と Nikolay Tzvetkov 氏の論文の中で独立に解決されていました。

以上のような展開をふまえて、我々の問題は2以上のすべての n について

・ $p > 1 + 2/(n-1)$ のときに、小さな初期値を与えて時間大域解の一意存在定理を確立することと、

・ $1 < p < 1 + 2/(n-1)$ のときに、小さな初期値に対する時間局所解の最大存在時間の下からの評価を得て、Zhou による上からの評価の最適性を検証することの2点でした。

Wang氏と横山氏と共同でこの2つの問題の解決に取り組み、横山氏との共著論文 (A remark on the almost global existence theorems of Keel, Smith and Sogge, Funkcialaj Ekvacioj, Vol. 48, No. 1, 2005, 1-34, および

Space-time L^2 -estimates and life-span of the Klainerman-Machedon radial solutions to some semi-linear wave equations, Differential and Integral Equations, Vol. 19, No. 9, 2006, 961-980) と Wang 氏、横山氏との共著論文 (On almost global existence and local well-posedness for some 3-D quasi-linear wave equations, 投稿中) のなかで培われてきた KSS 型評価式の改良版に基づく方法を駆使して球対称な強解 ($H^2 \times H^1$ 級の解) の枠組みで問題を解決した論文をまとめています。

(4) 逆2乗型ポテンシャルをもつ波動方程式と Schrödinger 方程式の球対称解に対する Strichartz 型評価式に対して、評価式が成り立つルベーグ空間の指数を、一般の場合よりも広げられるかどうかという問いに関して成果を上げることができず、今後の課題になりました。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

① Kunio Hidano, Jason Metcalfe, Hart F. Smith, Christopher D. Sogge, Yi Zhou, On abstract Strichartz estimates and the Strauss conjecture for nontrapping obstacles, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, Vol. 362, No. 5, 2010, 2789--2809.

② Kunio Hidano, On weighted Strichartz estimates and NLS for radial data in Sobolev spaces of negative indices, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, Vol. 22, 2010, 1--12.

③ Kunio Hidano, Small solutions to semi-linear wave equations with radial data of critical regularity, Revista Matemática Iberoamericana, 査読有,

Vol. 25, No. 2, 2009, 693--708.

④ Kunio Hidano, Yuki Kurokawa, Weighted HLS inequalities for radial functions and Strichartz estimates for wave and Schrödinger equations, Illinois Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 52, No. 2, 2008, 365--388.

⑤ Kunio Hidano, Nonlinear Schrödinger equations with radially symmetric data of critical regularity, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, Vol. 51, No. 1, 2008, 135--147.

〔学会発表〕(計4件)

① Kunio Hidano, Chengbo Wang, Kazuyoshi Yokoyama, 発表表題「On almost global wellposedness for quasilinear wave equations with radial symmetry」, 研究集会名「AMS 2010 Spring Western Section Meeting (Special Session on Harmonic Analysis and Partial Differential Equations)」, 2010年4月17日, University of New Mexico (米国ニューメキシコ州).

② 肥田野久二男, Chengbo Wang, 横山和義, 発表表題「3次元準線形波動方程式の $H^2 \times H^1$ -初期値に対する球対称解について」, 研究集会名「日本数学会年会(関数方程式分科会)」, 2010年3月27日, 慶応義塾大学矢上キャンパス.

③ 肥田野久二男, 発表表題「変数係数の波動方程式に対する重みつき時空 L^2 評価式と準線型方程式の時間局所適切性」, 研究集会名「非線形双曲型および分散型方程式の研究」, 2008年5月26日, 京都大学数理解析研究所.

④ Kunio Hidano, 発表表題「Weighted Strichartz estimates and well-posedness for nonlinear wave equations with low-regularity data」, 研究集会名「7th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Session on Qualitative Behavior of Solutions to Evolutionary PDE's)」, 2008年5月19日, University of Texas at Arlington (米国テキサス州).

ホームページ等

<http://xxx.yukawa.kyoto-u.ac.jp/abs/1004.3349>

で, 主に2009年度中に得られた研究成果をまとめた投稿中の論文 On almost global existence and local well-posedness for some 3-D quasi-linear wave equations (Chengbo Wang氏と横山和義氏との共著)を読むことができます.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

肥田野 久二男 (KUNIO HIDANO)
三重大学・教育学部・准教授
研究者番号: 00285090

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: