

機関番号：14403

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540166

研究課題名 (和文) 作用素不等式の開発とその応用

研究課題名 (英文) Developments and Applications for Operator Inequalities

研究代表者

藤井 淳一 (FUJII JUNICHI)

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：60135770

研究成果の概要 (和文)： もっとも大きな成果としては、以前から研究し続けてきた Corach-Porta-Recht のファイバー束の接続幾何学的考察を、正定値行列についての Hiai-Petz の幾何に適用できたことである。これら 3 編の結果によって、招待講演とはいえないかもしれないが、分科会における特別講演として、1 時間の講演を行うことができるようになったことが最大の成果と思われる。その他、作用素不等式については国内外の共同研究ができ、5 編の論文として成果を出すことができた。

研究成果の概要 (英文)： The main results are on the Hiai-Petz geometry for positive definite matrices. Since I have been studying the Corach-Porta-Recht geometry for positive operators where the affine connection for the tangent bundle is essential, I can consider the Hiai-Petz one from this viewpoint. I have written 3 papers on this subject and made a special lecture at the spring meetings of the mathematical society of Japan. I have also written 5 papers on operator inequalities as the joint works with foreign or domestic fellows.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	300,000	90,000	390,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析

## 1. 研究開始当初の背景

作用素平均および作用素不等式の研究を土台とし、作用素平均の発展として作用素エントロピーをふくむ非可換 (量子) 情報理論の研究をしていたところ、Corach-Porta-Recht による正作用素全

体のなす多様体の微分幾何学的考察がなされ、作用素幾何平均の path が測地線であることが分かった。当初から Uhlmann の考え方として、path の両端での微分係数として相対エントロピーは得られることが分かっていたので、その path が測地線になるので研

究は進むと思われたが、特殊な作用素平均でしか彼らの幾何学的考察が成り立たず、彼らの幾何学がファイバー束の抽象的な接続に依存することもあって、この方面の研究は停滞していた。

一方で、量子情報理論とのかかわりで作用素不等式の重要性が認められるようになってさまざまな分野とのつながりが強くなってきた。

このように様々な応用を持つ研究にしていくには幾何学や量子力学等の他分野の知識が必要となってくる。そこで、関連する他分野の知識・手法の蓄積を図るために科研費に応募することにした。

## 2. 研究の目的

他分野との交流を図りつつ、自らの研究対象である作用素不等式について、新たな広がりを探り、より意義の深いものを研究開発していくことが、本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

まず他分野の基礎的な最新資料を集めつつ、関連する研究をしている数少ない研究者との交流を図って、研究成果を積極的に発表していくことで、研究を深化させていく。

## 4. 研究成果

主な成果につながる背景としては、作用素平均・相対作用素エントロピーとのからみで興味を持ち続けていた、正作用素のなす多様体として Corach-Porta-Recht の幾何がある。東北大の日合文雄氏は Petz 氏 (ブダペスト大) との共同研究で、彼らの幾何学を違ってリーマン計量を主体に考察した論文を発表した。これは、新たな作用素平均としての測地線を与える幾何学で、その手法は、日合氏自身がすでに幸崎秀樹氏 (九州大) とのメタ作用素としての作用素平均の研究を完成させていたが (テキストとしても、Springer の Lecture Note in Mathematics 1820, Means of Hilbert Space Operators として発表されている)、それに基づくものである。これについて、この科研費を含む複数の協賛による研究会で日合氏から直接詳しく聞くことができたことがその後の発展に非常に役立った。

私自身は計量主体というより、Corach たちの方向と同様に、その上部構造としてのファイバー束構造に興味を持っていた。Hiai-Petz の計量幾何をこのような「接続の幾何」として計量と無関係に再構築し、また計量としては新たにユニ

タリ不変ノルムによって Finsler 計量を導入することができた。これが下記の 2 番目の論文として列挙したものの結果である。

さらにこの幾何学において測地線の最短性について、ノルムが「強凸」である場合には測地線自体が唯一の最短曲線であり、強凸でない代表的な Ky Fan ノルムについては、測地線以外に最短曲線が構成できることがわかった (下記 3 番目の論文)。

これらの結果によって、作用素論や作用素不等式 (特にユニタリ不変ノルムの不等式) の研究において幾何学的考察が本格的に導入できるようになり、今後の発展が期待できるところである。

これらの結果は、さらに一般の quasi-mean を測地線とする幾何学に発展し、作用素のエントロピーとも関連がついて、下記 4 番目の論文として結果を出すことができた。これら一連の結果については、(学会発表 3) の日本数学会春季年会 (慶応大: 2010、3/25) で、その経過を含めて、1 時間の特別講演で発表した。

また、海外の研究者との作用素不等式自体の共同研究も続け、論文の 1 など (下記列挙論文以外 2 編) にあるように、Kantorovich の不等式から発展した作用素不等式について、韓国の Kim Young Ok らとの研究から結果が出せ、そのほかにも作用素の新しいクラスの不等式として、5 などの成果も出している。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

1. Fujii Jun Ichi; Mohsen Kian; Mohammad Sal Moslehian, Operator Q-class functions, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, 73(2011), 75-80
2. Fujii Jun Ichi, Path of quasi-means as a geodesic, *Linear Algebra and its Applications*, 査読有, 434(2011), 542-558
3. Fujii Jun Ichi, The Hiai-Petz geodesic for strongly convex norm is the unique shortest path, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, 71(2010), 19-26
4. Fujii Jun Ichi, Structure of Hiai-Petz parametrized geometry, for positive definite matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 査読有, 432(2010), 318-326
5. Fujii Jun Ichi, Kim Young Ok, A Kantorovich type inequality with a negative parameter, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, 69(2009), 87-92

[学会発表] (計 6 件)

1. 藤井淳一、Jensen の外分点型作用素不等式について、日本数学会 春季総合分科会、2011 年 3 月 22 日、早稲田大学西早稲田キャンパス (アブストラクトにて発表相当と学会が公式承認)
2. 藤井淳一、作用素平均族の評価式について、RIMS 研究集会「作用素論における非可換構造の研究とその応用」、2010 年 10 月 29 日、京都大学 数理解析研究所
3. 藤井淳一、べき作用素平均の差の評価式、日本数学会 秋季総合分科会、2010 年 9 月 23 日、名古屋大学東山キャンパス
4. 藤井淳一、正定値行列の幾何学と、測地線としての quasi-means、日本数学会 春季総合分科会、2010 年 3 月 25 日、慶応義塾大学 矢上キャンパス
5. 藤井淳一、Hiai-Petz の幾何構造について、RIMS 研究集会「作用素論における非可換解析学の展望」、2009 年 10 月 29 日、京都大学 数理解析研究所
6. 藤井淳一、正定値行列における Hiai-Petz 幾何のファイバー束について、日本数学会 秋季総合分科会、2009 年 9 月 26 日、大阪大学 豊中キャンパス

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤井 淳一 (FUJII JUNICHI)  
大阪教育大学・教育学部・教授  
研究者番号： 60135770