

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年3月31日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540167

研究課題名（和文） 変動する指標をもつ関数空間

研究課題名（英文） Function spaces with variable exponent

研究代表者

中井 英一（NAKAI EIICHI）

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：60259900

研究成果の概要（和文）：「変動する指標をもつ関数空間」の理論を構築するため、これまでの「変動指数をもつ Lebesgue 空間」に関する研究を踏まえ、「変動指数をもつ Hardy 空間」および「変動増大度をもつ一般化 Campanato 空間」とそれらに関連した種々の関数空間について詳しく調査を行った。これらの関数空間の適切な定義を見つけ、そこでの種々の積分作用素の振る舞いを調べることを通して、理論が構築できた。

研究成果の概要（英文）：To establish the theory of function spaces with variable exponent, based on the study of Lebesgue spaces with variable exponent we have investigated Hardy spaces with variable exponent, generalized Campanato spaces with variable growth condition and their related function spaces. We have found a suitable definition of these function spaces and establish the theory by studying behaviour of integral operators on them.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：変動指数、関数空間、分数べき積分、Lipschitz 空間、Hardy 空間、Campanato 空間、Morrey 空間、Orlicz 空間

## 1. 研究開始当初の背景

現在までに理論が整備されてきた関数空間の多くは、Lebesgue 空間や Lipschitz 空間のように、関数  $f(x)$  の定義される位置  $x$  に関して一様に、可積分性や連続性が保証された空間である。これに対し、2000 年ごろより、「変動指数をもつ Lebesgue 空間」が電気流動学との関連で注目されるようになった。特に Diening [D] (2004) によって、この「変

動指数をもつ Lebesgue 空間」上で Hardy-Littlewood maximal function の有界性が証明されて以降は、急速に研究が深まった。しかしながら、「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」については、その適切な定義すらまだはっきりしていない状況であった。

## 2. 研究の目的

本研究では、この「変動指数をもつ Lebesgue 空間」だけでなく、「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」およびこれらを一般化した関数空間の様々な性質を調べ、「変動する指標をもつ関数空間」の理論を構築することである。

具体的には、「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」の適切な定義を定め、これらの関数空間が有益な性質を持つための、変動指数が持つべき条件を決定する。また関連した関数空間を調査するとともに、これらの関数空間と一般化 Morrey-Campanato 空間およびその前双対空間等を統一的に扱う手法を開発し、これら関数空間の相互関係を決定する。

## 3. 研究の方法

Fefferman により、 $BMO$  が Hardy 空間  $H^1$  の双対空間と同一視されることが知られている。同様に、Lipschitz 空間は  $H^p$  ( $p < 1$ ) の双対空間と同一視される。Lipschitz 空間は Campanato 空間の特別な場合であり、 $H^p$  にはアトム分解が知られている。これらの関係を「変動指数をもつ Lipschitz 空間」や「変動指数をもつ Hardy 空間」に反映させるため、研究代表者がこれまで研究してきた「変動増大度をもつ一般化 Morrey-Campanato 空間」およびその前双対空間等をもとに調査した。また、研究分担者の水田は Riesz ポテンシャルの視点から変動指数が持つべき条件を調べた。

さらに、理論を深めるため、これらに関連した関数空間として、Orlicz-Morrey 空間、Musielak-Orlicz 空間、Musielak-Orlicz-Morrey 空間、原点からの距離に依る重みをもつ Morrey-Campanato 空間等を調査し、そこにおける積分作用素の有界性を考察した。

研究代表者、研究分担者が中心になり、必要に応じて、内外の研究協力者を依頼した。随時まとまった結果を学会や研究集会、セミナー等で発表し、そこでの議論をフィードバックしながら研究を進めた。

## 4. 研究成果

「変動指数をもつ Hardy 空間」および「増大度が増大する高次の一般化 Campanato 空間」の理論を完成させることができた。また、関連する関数空間についてもその性質を詳しく調査して多くの結果を得た。具体的には、以下の通りである。

(1) Hardy 空間については、これまで多くの研究により、様々な性質や同値な定義が知られている。これらの性質をそのまま保った形で、「変動指数をもつ Hardy 空間」の理論を

構築することに成功した。例えば、指数が 1 より大きい場合には、我々の定義した「変動指数をもつ Hardy 空間」は「変動指数をもつ Lebesgue 空間」と一致する。また、指数が 0 と 1 の間のときは、「変動指数をもつ Hardy 空間」の双対空間は「増大度が増大する高次の一般化 Campanato 空間」と同一視できる。これは「変動指数を持つアトム」を用いて証明される。さらに「増大度が増大する高次の一般化 Campanato 空間」についても理論を整備した。これらの変動指数や変動増大度の満たすべき条件については、「変動指数をもつ Lebesgue 空間」に関してこれまで知られていた条件に関連した自然なものである。

(2) Hardy 空間の双対空間が Lipschitz 空間になることが従来から知られているが、Lipschitz 空間の前双対空間は通常の Hardy 空間以外にも存在する。本研究では、「変動指数をもつ Lipschitz (Holder) 空間」とその前双対空間を定義し、その性質を詳しく調査した。

結果として、一般化 Campanato 空間とその前双対空間との関係として定式化することができた。この前双対空間は、通常の Hardy 空間と Zorko が定義した前双対空間を含む広範なものである。

(3) Campanato 空間は、関数空間を定義するときの増大度関数の増大度を変えることにより、Lebesgue 空間、Morrey 空間、 $BMO$  空間、Lipschitz (Holder) 空間等を統一的に扱うことができる関数空間である。この増大度関数の増大度を場所ごとに変えることによって、「変動する増大度を持つ Campanato 空間」が定義できることが、すでに研究代表者の研究により分かっている。この「変動する増大度を持つ Campanato 空間」と、「変動指数をもつ Lebesgue 空間」、「変動指数をもつ Morrey 空間」、「変動指数をもつ Lipschitz (Holder) 空間等」との関係調べ、またある条件のもとで、変動する増大度を持つ Campanato 空間上での特異積分作用素と分数べき積分作用素の有界性を得た。

(4) Morrey 空間上での Riesz potential について、Sobolev の埋め込み性質を証明した。これは、指数が 1 の場合の Morrey 空間上での Riesz potential の性質を調べたものである。これまでの先行研究では指数が 1 より大きい場合の結果がほとんどであった。この研究により、指数が 1 の場合にも有効な手法を開発することができた。

(5) Orlicz-Morrey 空間を定義して、その基本的性質を調べるとともに、

Hardy-Littlewood の最大作用素、特異積分作用素、分数べき積分作用素の有界性を得た。ここで定義した Orlicz-Morrey 空間は、Lebesgue 空間の一般化である Orlicz 空間と Morrey 空間を統一的に扱えるようにしたものである。この Orlicz-Morrey 空間上での各作用素の有界性は、Lebesgue 空間、Orlicz 空間、Morrey 空間上でこれまでに得られていた結果をすべて含むものである。

(6) 「変動指数をもつ Morrey 空間」および「変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間 (Musielak-Orlicz-Morrey 空間)」を調査し、変動指数 Riesz ポテンシャルの Sobolev 埋蔵定理 (変動指数をもつ分数べき積分作用素の有界性) を得た。この結果は、変動指数が臨界指数の場合を含む結果である。さらに有界領域だけでなく、多次元ユークリッド空間全体での結果も得ることができた。その際には、Hardy-Littlewood maximal function の「変動指数をもつ Orlicz-Morrey 空間 (Musielak-Orlicz-Morrey 空間)」上での有界性も証明した。

(7) Gagliardo-Nirenberg 不等式を「変動指数をもつ Orlicz 空間 (Musielak-Orlicz 空間)」に拡張した。その際、一般化した Riesz ポテンシャル (一般化した分数べき積分作用素) を用いて、これまで知られていた結果を作用素と関数空間の両面で拡張することができた。

(8) 関数を定義する土台となる距離空間の基本的だが知られていなかった性質を見つけ出し、また有界平均振動関数と下方有界平均振動関数との違いを明らかにした。

(9) Sobolev 空間に関する Hardy の不等式を「変動指数をもつ Orlicz-Sobolev 空間」に拡張した。

(10) Orlicz 空間について、基本的な作用素である各点的マルチプレイヤーの特徴付けを与えた。

(11) 測度と擬距離をもつ Homogeneous 型空間において、通常の Campanato 空間と下方有界平均振動量を持つ Campanato 空間を比較するとともに、Lusin-area 作用素と Littlewood-Paley  $g^*_{\lambda}$  作用素の、通常の Campanato 空間から下方有界平均振動量を持つ Campanato 空間への有界性を得た。

(12) 一般化された増大度を持つ Campanato 空間上での Riesz 変換の近似定理を示し、これを Navier-Stokes 方程式の解の一意性

定理に応用した。これにより、これまで知られてた関数空間をもっと広げても、そこで解は一意であることが分かる。

(13) Campanato 空間は有界平均振動関数の空間である BMO の一般化であるが、この通常の BMO を含む dyadic BMO についての sharp maximal function を調べて、Navier-Stokes 方程式の解の延長可能性に関する結果を得た。

(14) 関数の空間以外にも、martingal の空間として Orlicz-Hardy 空間、Morrey-Campanato 空間を定義してその性質を詳しく調査し、先行研究を発展させ、本研究の理論を深めることができた。

(15) 原点からの距離に依存した重みを持つ Morrey-Campanato 空間を定義して、この関数空間を「 $B_{\sigma}$ -Morrey-Campanato 空間」と名付け、その基本的性質を調査した。この空間は Bouring algebra の双対空間である  $B_p$  空間の一般化で、しかも通常の Morrey-Campanato 空間をその特別な場合として含む関数空間である。この「 $B_{\sigma}$ -Morrey-Campanato 空間」に関する Littlewood-Paylay 分解を得た。さらに種々の積分作用素を含む一般的な準線型作用素について、この関数空間上における有界性を示した。また、円環領域上で積分値が 0 になる核をもつ特異積分作用素について、この関数空間上における有界性を示した。この結果は、ある種の重みを持つ Lipschitz 空間上での特異積分作用素の有界性を含むものである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 1 件)

① Yasuo Komori-Furuya, Katsuo Matsuoka, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Integral operators on  $B_{\sigma}$ -Morrey-Campanato spaces, Revista Matematica Complutense, to appear. 査読有り

② Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in  $\mathbb{R}^n$ , Revista Matematica Complutense, to appear. 査読有り

③ Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces, Journal of Functional Analysis Volume 262, Issue 9 (1 May 2012), 3665--3748. 査読有り

④ Eiichi Nakai and Tsuyoshi Yoneda, Bilinear estimates in dyadic BMO and the Navier-Stokes equations, Journal of the Mathematical Society of Japan, Volume 64, Number 2 (April 2012), 399--422. 査読有り

⑤ Takashi Miyamoto, Eiichi Nakai and Gaku Sadasue, Martingale Orlicz-Hardy spaces, Mathematische Nachrichten, Volume 285, Issue 5-6 (April 2012), 670--686. 査読有り

⑥ Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Takao Ohno and Tetsu Shimomura, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponent, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol.56, Issue 7-9 (July 2011), 671--695. 査読有り

⑦ Yoshihiro Mizuta, Eiichi Nakai, Yoshihiro Sawano and Tetsu Shimomura, Gagliardo-Nirenberg inequality for generalized Riesz potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, Archiv der Mathematik, Volume 98, Number 3 (March 2012), 253-263. 査読有り

⑧ Haibo Lin, Eiichi Nakai and Dachun Yang, Boundedness of  $Lusin$ -area and  $g_{\lambda}^*$  functions on localized Morrey-Campanato spaces over doubling metric measure spaces, Journal of Function Spaces and Applications, Volume 9 (2011), Issue 3, 245--282. 査読有り

⑨ Eiichi Nakai and Tsuyoshi Yoneda, Riesz transforms on generalized Hardy spaces and a uniqueness theorem for the Navier-Stokes equations, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.40, No.1 (February 2011), 67--88. 査読有り

⑩ Haibo Lin, Eiichi Nakai and Dachun Yang, Boundedness of  $Lusin$ -area and  $g_{\lambda}^*$  functions on localized BMO spaces over doubling metric measure spaces, Bulletin des Sciences Mathematiques, Vol.135, No.1 (January-February 2011), 59--88. 査読有り

⑪ Lech Maligranda and Eiichi Nakai, Pointwise multipliers of Orlicz spaces, Archiv der Mathematik, Vol.95, No.3 (September, 2010), 251--256. 査読有り

⑫ Yan Meng, Eiichi Nakai and Dachun Yang, Estimates for  $Lusin$ -area and Littlewood-Paley  $g_{\lambda}^*$  functions over spaces of homogeneous type, Nonlinear Anal., Vol.72, No.5 (March, 2010), 2721--2736. 査読有り

⑬ Eiichi Nakai, A generalization of Hardy spaces  $H^p$  by using atoms, Acta Mathematica Sinica, Vol.24 (2008), 1243--1268. 査読有り

⑭ Eiichi Nakai, Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function, Studia Mathematica, Vol.188, No.3 (2008), 193--221. 査読有り

[学会発表] (計41件)

① 古谷康雄, 松岡勝男, 中井英一, 澤野嘉宏, Integral operators on  $B_{\sigma}$ -Morrey-Campanato spaces, 日本数学会年会, 2012年3月29日, 東京理科大学神楽坂キャンパス

② 貞末岳, 中井英一, Maximal function and fractional integrals on martingale Morrey-Campanato spaces, 日本数学会年会, 2012年3月29日, 東京理科大学神楽坂キャンパス

③ 水田義弘, 中井英一, 大野貴雄, 下村哲, Maximal functions, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Musielak-Orlicz-Morrey spaces of variable exponent in  $\mathbb{R}^N$ , 日本数学会秋季総合分科会, 2011年9月30日, 信州大学松本キャンパス

④ Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano, Hardy spaces with variable exponents and generalized Campanato spaces, 8th International Conference on Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear Analysis, September 23, 2011, Tabarz (Germany)

⑤ Yasuo Komori-Furuya, Katsuo Matsuoka, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano,  $B_{\sigma}$ -spaces and integral operators, 8th International Conference on Function Spaces, Differential Operators, Nonlinear

Analysis, September 20, 2011, Tabarz, Germany

⑥ Haibo Lin, Yan Meng, 中井 英一, Dachun Yang, BMO, BLO and their localized spaces on doubling metric measure spaces, and, Lusin-area and  $g_{\lambda}^*$  functions, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学

⑦ 中井 英一, Campanato spaces with variable growth conditions, 日本数学会年会, 2010年3月27日, 慶應義塾大学理工学部

⑧ Eiichi Nakai and Tsuyoshi Yoneda, Riesz transforms on generalized Hardy spaces with an application, International Conference on Harmonic Analysis and Approximation Theory, November 21, 2009, Beijing Normal University, China, 招待講演

⑨ Eiichi Nakai, Orlicz-Morrey spaces and their preduals, The 3rd International Symposium on Banach and Function Spaces 2009, September 15, 2009, Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu, Japan, 招待講演

⑩ Eiichi Nakai, Orlicz-Morrey spaces, Symposium on function spaces and their applications, August 26, 2009, Beijing Normal University, China, 招待講演

⑪ Eiichi Nakai, Campanato spaces with variable growth conditions, Symposium on function spaces and their applications, August 24, 2009, Beijing Normal University, China, 招待講演

[その他]

ホームページ等

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~enakai/publication-j.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中井 英一 (NAKAI EIICHI)

茨城大学・理学部・教授

研究者番号：60259900

### (2) 研究分担者

水田 義弘 (MIZUTA YOSHIHIRO)

広島工業大学・工学部・教授

研究者番号：00093815

### (4) 研究協力者

貞末 岳 (SADASUE GAKU)

大阪教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：40324884

澤野 嘉宏 (SAWANO YOSHIHIRO)

京都大学・理学研究科・助教

研究者番号：40532635