

機関番号：14501

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540169

研究課題名（和文） 線形及び非線形シュレーディンガー方程式に対する散乱理論の研究

研究課題名（英文） Scattering theory for linear and nonlinear Schrödinger equations

研究代表者

足立 匡義 (ADACHI TADAYOSHI)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30281158

研究成果の概要（和文）：我々の研究成果は次の三つに大別される：1. 時間的に変動する一様電場内にある量子力学系に対する漸近完全性の問題に関して、これまでの結果のいくつかを改良した。2. 時間に関してゼロに漸近する一様電場内での逆散乱問題に関して、これまでの結果を補間する新たな結果を得た。3. 非線形分散型方程式に対する適切性と散乱理論に関して、特に臨界の場合に新たな結果を得た。

研究成果の概要（英文）：The achievements of our research are as follows: 1. We improved some results obtained by several previous works on the asymptotic completeness for quantum systems in time-dependent homogeneous electric fields. 2. We obtained a new result on a certain problem of the inverse scattering for quantum systems in homogeneous electric fields asymptotically zero in time. 3. We obtained new results on the problems of the well-posedness and the scattering theory for various nonlinear dispersive equations, especially in critical cases.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数理論理学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：多体問題，スペクトル理論，散乱理論，漸近完全性，電磁場，時間大域的適切性

1. 研究開始当初の背景

多体量子力学系に対する漸近完全性の問題は、量子散乱理論における中心的な問題の一つで、その解決は1960年代からの懸案である。漸近完全性とは、系の散乱状態の時間発展が、散乱のチャンネルを表現する状態の時間発展の重ね合わせとして漸近的に記述される、という性質で、物理学の理論的基礎をなす。しかし、それを数学的に厳密に証明することは容易ではなかった。1960年代の

Faddeev氏による三体問題に対する仕事に始まり、1980年代前半のEnss氏、1987年のSigal、Soffer両氏、1993年のDerezinski氏による仕事に至り、ようやく一般の N 体量子力学系に対する漸近完全性が、望ましいクラスのポテンシャルに対して示された。

ここまでは、外力場のない場合に限っての話であった。一方、外力場として時間的に不変な電磁場が存在する場合には、1990年代から次のような研究がなされた。以下、敬称

を略す。

① 一様電場のみある場合

Adachi-Tamura (1995-1996)

Herbst-Møller-Skibsted (1995-1996)

② 一様磁場のみある場合

Gérard-Laba (1994-1996)

Adachi (2001-2002)

③ 一様電場、磁場が共存する場合

Skibsted (1997)

①、②はそれぞれStark効果、Zeeman効果という、電磁場によって原子のスペクトル構造に及ぼされる重大な効果に関係する状況である。上記の研究により、①の場合は望ましい形で解決され、また③の場合は②の場合に帰着されることが示され、②の場合の解決が重要であることがわかった。②の場合には未解決問題が多く存在している。

上で考えられていた外力場は、時間的に不変な電磁場であった。一方、この研究での焦点は時間周期的に変動する電磁場内での多体散乱問題にある。まず、時間周期的な変動をする一様電場中における二体散乱問題に対しては、主に次のような研究が挙げられる。

④ 電場の時間平均がゼロの場合 (AC Stark 効果)

Yajima (1977; 短距離型)

Howland (1979; 短距離型)

Kitada-Yajima (1982; 長距離型)

⑤ 電場の時間平均がゼロでない場合

Møller (2000; 短距離型)

Adachi (2007; 長距離型)

これらは望ましい形で解決された。ところが、これが多体問題になると状況は一変する。

⑥ 電場の時間平均がゼロの場合 (AC Stark 効果)

Korotyaev (1985; 短距離型)

Nakamura (1986; 短距離型)

⑦ 電場の時間平均がゼロでない場合

Adachi (2001; 短距離型)

Adachi (2007; 長距離型)

⑦では一般の N 体系が扱われ、望ましい形で解決されたが、⑥ではFaddeev理論により三体短距離型散乱問題のみ扱われた。ここに時間的に不変な電磁場の場合との大きな差異があり、 N 体系を扱える理論の構築が待たれている。

2. 研究の目的

我々の研究目的は次の三つに大別される。

(1) AC Stark 効果を持つ多体量子力学系に対する散乱理論

時間周期的に変動する電磁場の場合を扱うための基礎理論を構築し、1. の⑥の場合の漸近完全性の問題を解決する。

(2) 時間周期的な電磁場を持つ非線形シュレーディンガー方程式に対する散乱理論

(1)では、時間周期的な変動をする電磁場

内での多体量子力学系に対する散乱理論を考えていたが、そこで扱った線形シュレーディンガー方程式に非線形項を加えてできる非線形シュレーディンガー方程式を研究の対象にし、初期値問題に対する時間大域的適切性や散乱理論に関する研究を行うのが目的である。これは粒子数を相当多くしたときに考えられる Hartree-Fock 近似と関連があり、数学的にも物理学的にも意義のある解析対象となると考えられる。

(3) 時間的に不変な一様磁場中における多体量子力学系に対する散乱理論

時間的に不変な一様磁場の中にある、部分系の全電荷がゼロであるような場合も含めた極めて一般的な多体量子力学系を考え、その系に対する漸近完全性の問題を解決するのが目的である。

3. 研究の方法

(1) AC Stark 効果を持つ N 体量子力学系に対する散乱問題は、Avron-Herbst の公式によって、時間周期的な相互作用ポテンシャルを持つ N 体シュレーディンガー作用素に対する散乱問題に帰着される。よって、後者を解決するための理論を構築することに傾注することになる。外力場が時間的に不変である場合、伝播評価という、状態の時間発展に沿っての、粒子の位置・運動量の関係を表す有効な評価を導出することが鍵となり、それには Mourre 評価が非常に重要な役割を果たしてきた。一方、外力場が時間的に変動する場合、対象となるハミルトニアンは時間に依存しており、その Mourre 評価は直接的には有効でないことが多い。そこで、主に二つの方針が想起される。

① Howland-Yajimaの方法による解析

時間変数をも取り込んだ Floquet ハミルトニアンを導入し、それに対する Mourre 評価を導出して問題を解決する。現時点で三体系に対してさえ、未だにその Floquet ハミルトニアンに対する Mourre 評価の導出には成功していない。Møller-Skibsted (2004) により得られた極限吸収原理から直ちに導かれる Kato-smoothness に関連する伝播評価だけでは多体問題を扱うにはかなり不足しているため、新たな手法が望まれる。

② 物理的時間発展作用素に対する伝播評価の導出

より物理的に自然な発想に従い、その時間に依存したハミルトニアンが生成するユニタリ時間発展作用素に対する伝播評価を、直接導出する方法を考案し、それをを用いて解析する。Adachi (2007) により、電場の時間平均がゼロでない場合には、その導出がなされ、長距離型散乱問題においても漸近完全性が成立することが示されたが、AC Stark効果のように電場の時間平均がゼロである場合に

もその手法が通用するかどうかはまだわからない。というのも、①で挙げたFloquetハミルトニアンに対するMourre評価がここでも重要な役割を果たしているからである。

①、②において重要となるのは、モノドローミ作用素に対するスペクトル理論である。Møller-Skibstedのアイデアに従って理論を発展させるのが局面を開く方策の一つである。もう一つの打開策は、二体問題と多体問題の中間に位置付けられる電荷移動モデル (charge transfer model) に対する散乱理論を構築してから、標記の問題を解決するというものである。

(2) 時間周期的な変動をする一様電場による位置エネルギーが線形項に含まれているような、非線形シュレーディンガー方程式を考える。電場による位置エネルギーが、今考えている電場の時間平均によって与えられるようにAvron-Herbstの公式を用いて方程式を変形すると、線形ポテンシャルには位置に関する、時間周期的な平行移動が施されるが、非線形項は、それがゲージ不変性を持つ場合には不変である。Avron-Herbstの公式によって得られた方程式の利点は、電場による位置エネルギーの項に時間依存性がなくなったため、エネルギー保存則はないものの、エネルギーの有界性が得られる可能性を有しているところにある。そこで、この非線形シュレーディンガー方程式を解析することになる。時間に依存するハミルトニアンが生成する時間発展作用素に対するStrichartz評価を導出し、その評価を用いて、初期値問題に対する時間大域的適切性と散乱理論を研究する、というのがその方策である。

(3) 未解決である場合の中では最も単純であると思われる、荷電・非荷電粒子混在系で、荷電粒子の個数は2以上で、荷電粒子からなる部分系の全電荷は全てゼロでないようなものから考えて解決の糸口を見つけ、一般の場合まで込めて解析する方法を編み出す。数学的には、系を支配するハミルトニアンと全擬運動量に関する情報のみを用いて、荷電粒子が形成する荷電部分系の内部構造を把握する手法を開発することが最も重要になると考えられ、それをより単純な系から抽出していくのが方策の一つである。

4. 研究成果

(1) 時間周期的に変動する一様電場内での特異ポテンシャルによる量子散乱

研究代表者である足立は、その学生であった木村俊之氏・清水良雅氏と共同で、標記の課題において、電場の時間平均がゼロでないという条件下で、量子2体長距離散乱問題を考え、粒子間の相互作用ポテンシャルがある L^p 型局所特異性を有する場合に、修正波動作用素の存在とその漸近完全性に関する研究

を行った。これまでは短距離型ポテンシャルの場合でさえ、ポテンシャルがある程度滑らかであることが必要とされていた。より具体的に述べると、空間次元が3以上の場合に、 $|x|^{-1+b}$ ($0 < b < 1$) のような局所特異性を有するポテンシャルが取り扱える理論を構築することに成功した。このようなポテンシャルの特異性は、電場の時間平均がゼロである場合には既に扱われており、それを時間平均がゼロでない場合に拡張したものと言える。ただ残念ながら、 $|x|^{-1}$ のような局所特異性を有するクーロンポテンシャルを扱うことはできていない。また、空間次元が2以下の場合には、局所特異性を有するポテンシャル自体を取り扱うことができていない。これらのことは電場の時間平均がゼロである場合でも同じ状況にあり、両者の場合ともに今後の研究課題である。以上の結果は、時間と位置のみに関係する新たな修正因子による修正波動作用素の導入の提唱とともに、既に学術論文⑤において発表されている。この成果を基に、電荷移動モデルや多体問題に対する結果の更なる拡張を行うことも今後の研究課題の一つである。

(2) 時間に関して定電場に漸近する一様電場内での量子散乱

研究代表者である足立は、その学生である石田敦英氏と共同で、ゼロでない定電場に時間的に漸近する電場内での量子2体長距離散乱問題を考え、修正波動作用素の存在と漸近完全性に関する研究を行った。先行研究としてはYokoyama (1999) によるものがあるが、短距離型ポテンシャルに対する研究のみなされていた。Avron-Herbstの公式によって、定電場内での時間依存ポテンシャルによる散乱問題に帰着させたとき、時間発展に沿ってのエネルギーの有界性が一般に得られる条件は、定電場への漸近オーダーが t^m ($m > 2$) であることを明確にして解析を進めたことも既存の結果の改良に繋がった。この結果は学術論文②において発表されている。

(3) 時間に関してゼロに漸近する一様電場内での量子逆散乱

研究代表者である足立は、その学生である鎌田達也氏・数野真行氏・虎谷啓佑氏と共同で、電場がゼロに時間的に漸近しているとき、その漸近オーダーが t^n ($0 < n < 1$) であるという条件下で、散乱作用素からポテンシャルの短距離型部分が一意的に定まるといふ一意性の問題の研究を行った。このような電場内では、電場のないときには長距離型としか考えられないポテンシャル (例えばクーロンポテンシャル) も短距離型と見做せるので、散乱作用素から定まるポテンシャルのクラスは、電場がゼロであるときよりも広がっている。これまでの研究では、ゼロでない定電場 (Weder (1996)、Nicoleau (2003))、

Adachi-Maehara (2007))、時間周期的でその時間平均がゼロでない電場 (Nicoleau (2005)、藤原 (2010))、ゼロでない定電場に時間的に漸近する電場 (豊田 (2010)) などが扱われていた。我々の研究での重要な要請は、区間 $[0, d]$ における電場の積分がある方向に t^{-n} のオーダーで増大するというところで、この観点から見直すと、これまでの研究では $n=0$ の場合を扱っていたことになる。また、電場がゼロ以上の結果については、例えばEnss-Weder (1995)によるものがあるが、それは形式的には $n=1$ の場合と見做すことができ、我々の結果はパラメータ n によって、 $n=0$ に対する結果と $n=1$ に対する結果を補間しているものと考えることができる。証明は基本的にはEnss-Wederの方法に基づいており、Adachi-MaeharaにおいてWederの議論を改良してできたトリックも取り入れている。この結果は学術論文①において発表されている。

(4) 非線形分散型方程式に対する適切性と散乱理論

研究分担者である高岡は標記の課題において、学術論文⑧では空間3次元の場合にエネルギー臨界冪である5次の非線形項を持つ非線形シュレーディンガー方程式を考え、Colliander, Keel, Staffilani, Taoらと共に時間大域的適切性を示し、更にその時間大域解の漸近挙動を調べた。学術論文⑨では空間2次元で3次の非線形項を持つものについても研究し、また学術論文⑦では双線形Strichartz評価に関連して時間大域的適切性を論じ、学術論文④では高周波領域へのエネルギー遷移について論じている。非線形シュレーディンガー方程式の他にも非線形分散型方程式を取り扱い、学術論文⑥ではBenjamin-Ono方程式のソリトン解の、エネルギー空間における軌道安定性を論じ、学術論文③では周期境界条件を持つ修正KdV方程式の、低正則性における時間局所的適切性を論じた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① T. Adachi, T. Kamada, M. Kazuno and K. Toratani, On multidimensional inverse scattering in an external electric field asymptotically zero in time, to appear in Inverse Problems. 査読有
- ② T. Adachi and A. Ishida, Scattering in an external electric field asymptotically constant in time, to appear in Journal of Mathematical Physics. 査読有
- ③ K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Ts

utsumi, Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition, Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A **28** (2010), 1635-1654. 査読有

④ J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation, Inventiones Mathematicae **181** (2010), 39-113. 査読有

⑤ T. Adachi, T. Kimura and Y. Shimizu, Scattering theory for two-body quantum systems with singular potentials in a time-periodic electric field, Journal of Mathematical Physics **51** (2010), 032103 (23pages). 査読有

⑥ S. Gustafson, H. Takaoka and T.-P. Tsai, Stability in $H^{1/2}$ of the sum of K solitons for the Benjamin-Ono equation, Journal of Mathematical Physics **50** (2009), 013101 (14pages). 査読有

⑦ H. Takaoka, Bilinear Strichartz estimates and applications to the cubic nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions, Hokkaido Mathematical Journal **37** (2008), 861-870. 査読有

⑧ J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in \mathbf{R}^3 , Annales of Mathematics. Second Series **167** (2008), 767-865. 査読有

⑨ J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Resonant decompositions and the I -method for the cubic nonlinear Schrödinger equation on \mathbf{R}^2 , Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A **21** (2008), 665-686. 査読有

[学会発表] (計 2 件)

① 高岡秀夫, Morawetz評価式と非線形シュレーディンガー方程式の散乱理論, 日本数学会北海道支部講演会, 2008年11月28日, 北海道大学.

② 足立匡義, 時間周期的に変動する電場中の量子力学系に対する散乱理論, 日本数学会函数方程式論分科会特別講演, 2009年9月25日, 大阪大学.

[図書] (計 0 件)

[その他]

ホームページ:

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~adachi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足立 匡義 (ADACHI TADAYOSHI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30281158

(2) 研究分担者

高岡 秀夫 (TAKAOKA HIDEO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：10322794

(3) 連携研究者

なし