

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540171

研究課題名(和文) 量子論に現れる特異点の作用素解析学的研究

研究課題名(英文) Operator-Analytical Study of Singularities Appearing
in Quantum Theory

研究代表者

廣川 真男 (HIROKAWA MASAO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：70282788

研究成果の概要(和文)：

非ユークリッド空間上の量子力学に関しては、1次元空間に接合を入れる事で接合に特異点
が集中した空間を設定し、その空間上を運動する電子などの自由粒子を非相対論的に考察した。
この空間上の電子のハミルトニアン自身の自己共役拡張と境界条件との関係を調べ、境界条件に位
相因子が現れるような自己共役拡張となるための十分条件を発見した。場の量子論に関する特
異性に関しては、1モード・レーザーと相互作用する2準位原子を扱った。量子相転移の一つ
として基底状態相転移を起こす結合の強さに関する特異性を調べ、エネルギー・レベル交差に
より基底状態相転移を特徴付けを行った。

研究成果の概要(英文)：

For the study of quantum physics on the non-Euclidean space, we configured the 1-dim
space with a junction, where we supposed many singularities concentrate on the junction.
We handled an electron moving in the space with non-relativistic theory. For the electron
we investigated the relation of some self-adjoint extensions and corresponding boundary
conditions. We found a sufficient condition in order that the boundary condition has a
phase factor. As for the property of singularity in quantum field theory, we handled the
physical system of a 2-level atom coupled with a 1-mode laser. We study the singularity of
the coupling strength which causes the ground state phase transition as one of quantum
phase transition. We characterized it with the energy level crossing.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：作用素解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：自己共役拡張、境界条件、位相因子、基底状態相転移、量子相転移、
エネルギーレベル交差、特異性

1. 研究開始当初の背景

- (1) 非ユークリッド空間上の量子論の数学としての研究は、幾何学的意味のみならず、解析学的にも意味があり、グラフ上のシュレディンガー作用素のスペクトル理論等、色々な研究が行われていた。また、この分野の先駆的な研究として、空間に点のようにルベグ測度がゼロの穴（特異点のみの穴）が空いている場合に、デルタ型相互作用を持つシュレディンガー作用素の自己共役拡張とそのスペクトル、また、シュレディンガー粒子の位置作用素と運動量作用素の正準交換関係やシュレディンガー表現などが多くの数学者により研究されていた。しかしながら、ルベグ測度がゼロでない穴が空いている場合の研究はあまり多くなく、この研究が、穴に接合として実際の物質をあてがう上でも必要になっていたことが本研究課題の一方のテーマの背景であった。
- (2) 場の量子論に現れる数学的モデルの中で特異性を示す問題に、光のエネルギーの低い所で生じる赤外正則か赤外特異に応じて、考えている物理系の基底状態が存在する場合と存在しない場合に分かれる現象が数学、特に、作用素解析学で解析できるようになって来ていた。このような場の量子論における特異性を示す現象を数学的特徴付けを行い解析することが重要になってきたことが本研究課題のもう一方のテーマの背景にもなっていた。

2. 研究の目的

- (1) ① 非ユークリッド空間上の量子力学に関しては、ルベグ測度がゼロでない穴を持つ空間上のシュレディンガー作用素を解析することが目的である。この具体的な目的は、以下の②から④のようなものである：
 - ② ①の空間上を運動するシュレディンガー粒子のハミルトニアン自己共役拡張を求める。
 - ③ ②で求めた自己共役拡張の定義域を波動関数の境界条件の言葉で記述する。
 - ④ ③により表現し直した定義域の境界条件の中に、境界を形成する穴から来る物理的特性を研究する。

- (2) 当初、非相対論的量子電磁気学に見られる場の量子論に潜む数学的問題として、赤外正則か赤外特異により基底状態の存在と非存在の問題をカールマン作用素を用いて特徴付けるのが目的であったが、申請が採択された段階で、この数学的問題の研究が他の手法を用いかなり解明が進む一方で、赤外領域の光子と相互作用した2準位原子の結合の強さに関する特異性を示す量子相転移、特に、基底状態相転移の問題が、非相対論的量子電磁気学にも見られる事に気が付き、また、そのような結合の強さの領域(弱結合領域、強結合領域、そして特に、超強結合領域)が最近の物理学実験で実現できるようになり、この特異性の問題が重要になってきた事を受け、本申請の『特異性』の方向を量子相転移のそれに向ける事にした。
 - ① 対象とする物理を共振器内の1モード・レーザーを相互作用する2準位原子の系に設定し、量子相転移、特に基底状態相転移を解析する事が目的で、このより具体的目的は以下の②から④のようなものである：
 - ② 基底状態相転移を示す現象として、エネルギー・レベル交差による基底状態の入れ替わりに注目する。
 - ③ エネルギー・レベル交差と結合の強さの関係を調べる。
 - ④ ②で明らかにしたエネルギー・レベル交差に基づく基底状態相転移から、どのような他の物理的・数学的な変化が見えるかを調べる。

3. 研究の方法

- (1) 非ユークリッド空間上の量子力学：
 - ① 量子細線を意識し、1次元ユークリッド空間から接合に相当する線分を取り除いてできる1次元非ユークリッド空間を電子の運動する空間と設定した。数学としては、取りあえず接合の部分はブラックボックスとし、物理実験への応用を考える段階になったら、接合部分に対して数学的な空間設定を行う。
 - ② ①の数理モデルに対して、①の空間上を運動するシュレディンガー粒子のハミルトニアンをコンパクト・サポートを持つ無限回連続微分可能な関数のクラスを波動関数としての定義域とし、そこからの自己共役拡張を不足指数の一般論を用

いてその定義域を与える。

③ ②で求めた自己共役拡張の定義域を波動関数の境界条件の言葉で記述する訳だが、このとき、シュレディンガー粒子の波動関数が接合をトンネルせずにそれぞれの半直線のみで運動する場合と、波動関数が接合をトンネルする場合の2パターンに分け注目する事で境界条件を特徴付ける。

④ ③のシュレディンガー粒子の波動関数が接合をトンネルせずにそれぞれの半直線のみで運動する場合の境界条件では、その境界条件に位相因子が現れない事が、抜く線分を抜く点に変えたときの過去の研究結果から予想されるので、それを証明する。

⑤ ③のシュレディンガー粒子の波動関数が接合をトンネルする場合の境界条件の中に、位相因子が現れるための十分条件を探す。また、その位相因子の数学的特徴付けを行う。

⑥ ⑤の結果において、抜いた線分を抜く点にする極限で、過去に研究された点を抜いた場合とどのような対応があるかを調べる。

(2) 非相対論的量子電磁気学に見られる基底状態相転移：

① この分野の物理学実験の事実により、弱結合領域及び強結合領域においてはジェインズ-カミング・モデル、超強結合領域においてはラビ・モデルが有効ハミルトニアンを与える事が知られているので、数学的対象とするハミルトニアンをこの2つに絞る。

② ジェインズ-カミング・モデルにおけるエネルギー・レベル交差を結合の強さで特徴付け、交差を数学的に把握する。

③ ②で明らかにしたエネルギー・レベル交差に基づく基底状態相転移から、「基底状態が纏う光子の個数の変化」、「分離可能状態からエンタングル状態への遷移」などが予想されるが、その変化が起こるかを調べ、起こる場合はそれを証明する。

④ 強結合領域から超強結合領域へ結合の強さが移るとき、ジェインズ-カミング・モデルからラビ・モデルへ移る事を示す実験データが得られているが、これを量子相転移の概念を使い説明する。

4. 研究成果

(1) 非ユークリッド空間上の量子力学：

『3. 研究の方法(1)』で記述した、1次元空間に接合を入れる事で接合に特異点が

集中したという想定で1次元空間を非ユークリッド化し、その空間上を運動するシュレディンガー粒子を考察した。シュレディンガー粒子の波動関数が接合をトンネルせずにそれぞれの半直線のみで運動する場合には、波動関数の境界条件には位相因子が出現しない事を証明した。また逆に、波動関数が接合をトンネルする場合には、境界条件の中に位相因子が現れる事がある事を証明し、そのための十分条件を特徴付けた。さらに、抜いた線分を抜く点への極限を取ると、前者の境界条件はアルベリオらの教科書にあるスタンダードなよく知られた境界条件に対応するが、後者の場合は、学術雑誌に未発表のエクスマーグロッセの結果に対応する事が示され、彼らの結果に意味を与える結果にもなった。

以上の結果は、『雑誌論文①』にあるように、IOPが出版している物理の雑誌の「アハラノフ・ボーム効果発見50周年&ベリー位相発見25周年を記念する号」に投稿し採択され発表することができた。

(2) 非相対論的量子電磁気学に見られる基底状態相転移：

『3. 研究の方法(2)』で記述したように、ジェインズ-カミング・モデルにおけるエネルギー・レベル交差を結合の強さで特徴付け、交差を数学的に把握し、基底状態が遷移を繰り返す事で作られて行く様子を数学として示した。この遷移過程が明らかになることで、基底状態が纏う光子の個数が把握でき、さらに分離可能状態からエンタングル状態への遷移する様子も分かった。

以上の結果は、『雑誌論文②, ③』に掲載され、さらに、『学会発表①-④』により発表した。

今後の展開として、『研究の方法(2)④』に関しては、回路量子電磁気学に見られる実験結果を基に、強結合領域と超強結合領域の間の特異性に注目し、前者から後者へ移る過程で、ハミルトニアンの持つカイラル性がいかに重要でどのような役割を基底状態で演じるかを明らかにする。本研究課題遂行中に、ある程度の結果を得ており、次の研究課題でさらに発展させる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① Y. Furuhashi, M. Hirokawa,
K. Nakahara and Y. Shikano,
Role of Phase Factor in Boundary
Condition of One-Dimensional Junction,
*Journal of Physics A: Mathematical and
Theoretical*, 43巻, 2010, 354010.
- ② M. Hirokawa, Dicke-Type Energy Level
Crossings in Cavity-Induced Atom
Cooling: Another Superradiant
Cooling,
Physical Review A 79巻, 2009, 043408.
- ③ M. Hirokawa, The Dicke-Type Crossings
among Eigenvalues of Differential
Operators in A Class of
Non-Commutative Oscillator,
Indiana University Mathematics Journal
58巻, 2009, 1493-1536.

[学会発表] (計 4 件)

- ① M. Hirokawa, Another Chirality
Quantum Phase Transition in
the Atom-Cavity Interaction,
2011 年 3 月 16 日, Centre de Physique
Théorique UMR6207, Marseilles, France
- ② M. Hirokawa, A Chirality in
the Ground State Energy of the Fully
Coupled Model in Circuit QED,
in Erik Balsev's 75th Birthday Conference,
2010 年 10 月 1 日, Aarhus University,
Aarhus, Denmark
- ③ M. Hirokawa, Generalized
spin-boson model in the light of circuit
QED,
Doppler Institute Seminar,
2010 年 3 月 23 日, Doppler Institute,
Prague, Czech
- ④ M. Hirokawa, Have fun exploring
circuit QED with non-commutative
oscillators –From mathematics to
experimental physics,
in 数学的場の量子論とくりこみ理論,
2009 年 11 月 28 日, 九州大学西新プラザ,
福岡

[その他]

ホームページ等

[http://www.math.okayama-u.ac.jp/~hiroka
wa](http://www.math.okayama-u.ac.jp/~hiroka
wa)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣川 真男 (HIROKAWA MASAO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：70282788

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

田村 英男 (TAMURA HIDEO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：30022734

大下 承民 (OSHITA YOSHIHITO)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：70421998

河備 浩司 (KAWABI HIROSHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：80432904

伊東 恵一 (ITO KEIICHI)

摂南大学・工学部・教授

研究者番号：50268489

廣島 文生 (HIROSHIMA FUMIO)

九州大学・大学院・数理学研究院・准教授

研究者番号：00330358

様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書