

機関番号：15401

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ~ 2010

課題番号：20540172

研究課題名 (和文) 特異偏微分作用素の数論的現象と完全漸近解析の研究

研究課題名 (英文) Study of Diophantine phenomena and exact asymptotic analysis of singular partial differential equations

研究代表者

吉野 正史 (YOSHINO MASAFUMI)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00145658

研究成果の概要 (和文)：ベクトル場の標準形理論にあらわれる形式変換の発散現象を Diophantine 条件を用いることなく、解析的に扱う方法をしめした。方法は、漸近解析の考え方に沿い、ボレル総和法を拡張して発散級数を適当な部分領域で意味づけて行った。さらに、解析的非可積分性と滑らかな可積分性が同時におこるようなハミルトン系で、発散する第一積分をボレル総和法の観点から意味づけた。

研究成果の概要 (英文)：We showed analytical methods without the Diophantine condition in treating divergence of formal transformations in the normal form theory of a vector field. Our methods, based on asymptotic analysis, extend the so-called Borel-Laplace method, and give a real meaning to a divergent series in certain subdomain. Moreover, we give a meaning, by a Borel resummation method, to divergent first integrals of Hamiltonian systems, for which analytic non-integrability and smooth integrability occur simultaneously.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：特異偏微分方程式，ボレル総和法，力学系

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：特異偏微分方程式，ボレル総和法，小分母の問題，ハミルトン系の非可積分性，漸近解析，モーメント微分方程式，Toeplitz 作用素，ベクトル場の標準形

1. 研究開始当初の背景 特異な微分方程式あるいはベクトル場の変換方程式の形式解を発散級数として構成し、そのある種の意味づけを通して、真の解の構造をしらべるといふ考え方は、おそらくポアンカレまでさかのぼる。その後、バーコフらによって、発展させられてきたのであるが、常微分方程式、力学系に関しては、本研究開始当時、Ramis, Schaeffe, Balser らによる研究がすでに存在

した。これらを踏まえて、Stolovitch あるいは Braaksma, Schaeffe, 三宅氏、大内氏らにより、ボレル総和法を基本においた研究が開始されていた。さらに、数理研の河合隆裕氏、竹井義次氏、神戸大学の小池氏らによるボレル総和法と完全漸近解析を用いたシュレディンガー方程式の研究もボレル総和法を基礎において解析をするという点で、本研究と深いつながりを持っていた。実際、特異摂動

解の発散級数の扱いという問題意識は、本研究の動機のひとつともなった。これらの流れを踏まえて、発散解を取り扱う新しい方法の開発が本研究の主なテーマであった。

2. 研究の目的 本研究では、特異偏微分作用素、主にベクトル場の標準形理論にあらわれる変換方程式系の小分母の問題を特異摂動理論と完全漸近解析という立場から研究することを目的とする。特に、Diophantine 条件を用いず、解析的に扱う方法の開発を目的としている。このための研究の方針として、多変数発散級数のボレル総和法および resummation された解の解析接続の性質の研究および小分母の問題への適用というグランドデザインのもとで、研究を進める。これらの考え方は、他の発散現象に対しても適用可能であるが、ここでは、ハミルトン系の非可積分性、Birkoff 標準形の発散を研究目的とする。具体的には、下記の問題において、上記の立場からの研究をおこなうこととした。

(1) 小分母の問題の発散と非線形性 (2) 解析的に、完全積分可能でないハミルトン系での発散 (3) 自明でない Jordan block を線形部分がもつベクトル場の標準形への形式変換の発散 (4) 固有値が消えるベクトル場の標準形への変換に現れる発散。(5) リーマン・ヒルベルト分解ができない場合に起こる発散。これらの、テーマ以外にも関連したテーマは適宜研究することにした。たとえば、超級数の理論の展開、生態学で種の多様性の効果の数学的検証を行うときの発散に、議論を応用することを目的とした。

3. 研究の方法 平成 20 年度は、ボレル総和法の変数化、特に、パラメータを含んだ場合を中心に研究し、理論の整備をした。平成 21 年度以降は、小分母の問題への適用を主に行ない、ベクトル場の標準形問題への応用の観点からの研究を進めた。そのため、関連分野の研究者との研究連絡、特に、ウルム大学（ドイツ）の Balser 氏との共同研究をおこない、ウルム大学（ドイツ）への研究訪問も実施した。また、Balser 氏の主催する Banach center（ポーランド）でのボレル総和法の国際会議開催へも協力し、外国の研究者との連携および研究を実施した。同時に、完全漸近解析を研究している京都大学数理解析の竹井氏、河合氏のグループの開催する国内および国際研究集会へ参加し、研究を実施した。また、ボレル総和法に関する先行研究のある名古屋大学の三宅氏および岡山理科大学の日比野氏、その他、市延氏、白井氏との研究討論も広島大学等で実施した。また、特異微分作用素の特異解の構成を研究して

いる田原氏（上智大）、山根氏（関西大）との研究連絡もおこない、多面的に研究をすすめた。力学系の関係では、伊藤氏（金沢大）との研究討論あるいは研究集会の共同開催もおこなった。当該研究の成果を力学系の標準形の研究にもどし、またそこで生じる新しい問題を当該研究にフィードバックさせるため、Todor Gramchev 氏（カリアリ大・イタリア）と力学系の標準形理論での共同研究を継続し、本研究に生かした。このため、カリアリ大学（イタリア）への研究連絡と共同研究のための研究訪問を実施した。このような少数人数での研究と同時に、広島大学で関連する研究者および広く若手の研究者を集めた研究集会を開催、情報交換を行い、当該研究の実施に役立てた。（広島大学数理解析セミナー、冬のセミナーなどを開催）。また、研究分担者には、関連分野の情報を提供してもらった。このような多面的な研究討論を通し、本研究は研究代表者が中心になって、研究を進めた。また、超幾何関数やモノドロミーの研究との関連についても、研究をおこない、その他、研究途中で出てきた生態学に関連した問題についても研究を実施した。

4. 研究成果 ベクトル場の標準形理論にあらわれる変換方程式系の小分母の問題を Diophantine 条件を用いることなく、解析的に扱う方法の確立という目的では、論文 1（番号は以下の発表論文の番号に対応する。以下も同様）において、2変数の場合にそのような方法を与えた。研究論文 7 も特異解の枠組みでの同じテーマに対する回答といえる。また、論文 7 は、特異偏微分作用素の特異解の構成に関する田原氏の研究結果の拡張ともなっている。

自明でない Jordan block を線形部分がもつようなベクトル場の標準形への形式変換の発散の研究では、カリアリ大学（イタリア）の Gramchev 氏と共同研究を行い、Diophantine 現象によって起こる発散のメカニズムの研究と発散がおこらない関数空間の研究、また Diophantine 条件を用いないで、形式解に対応する真の解の存在が言える解空間の設定について、論文 11 において研究した。関連した力学系（写像）の場合の研究は論文 8 で、実施された。

ボレル総和法の変数化への拡張の研究に関しては、論文 2 で偏微分方程式系への応用を念頭において、モーメント総和法の基礎理論を研究した。この考え方は論文 3 において、ハミルトン系の（非）完全積分可能性の解析へボレル総和法を適用できるように拡張されている。パラメータを含んだ場合の特異摂動と漸近解析および発散現象につい

では、論文4で総和法をとった解の解析接続可能性と可解性の関係がしめされた。これは、小分母の問題でおこる発散のうち、グルサー問題について関係を明らかにした。リーマン・ヒルベルト分解ができない場合に起こる発散もグルサー問題では、実はこのような発散であることもわかった。

解析的完全積分可能でないハミルトン系で、形式的な第一積分を構成できることは多いが、この場合の第一積分の発散の研究は、論文3,6,9でおこなわれた。ここでは、第一積分の発散(=非解析性)の十分条件を与えており、また発散級数のボレル総和可能性すなわち意味づけを議論している。これらの、発散級数の意味づけの研究を実行する過程で、当初の研究計画では予想されなかったが、超級数の概念が重要であることがわかった。実際、滑らかな解の構成は超級数の概念を用いると漸近解析の立場から捉えることができる。超級数のボレル総和可能性は、簡単な場合に3で議論したが、詳細な研究は今後の課題として、継続することにした。これは、角領域での解の構成に対応し、解析的なクラスでは、解が存在しないが、滑らかな関数空間で存在するという事実にも深く関連しており、新しい理論の可能性を示唆している。

これらの漸近解析の理論の応用として、生態学への応用を研究した。実際、集団生態学にあらわれる力学系において、種数が無限に多くなるときは、種の多様性の観点から重要であるが、このときに起こる発散現象については、論文5において研究された。種の多様性がもたらす安定効果が、漸近解析を用いて数学的にしめされた。この研究は、引き続き集団遺伝学モデルを組み込んだ生態学モデルについても継続される予定である。また、ウーハン大学(中国)のChen Hua氏、Liu Weian氏、ウーハン科技大のYang Yin氏とも、関連した生態学モデルの研究を実行した。これらは、今後も継続する予定である。

国際会議での講演は、以下の学会発表の項目番号2,3,5,8が発表に対応する。特に、5では、本研究テーマに関連した国際会議を京都大学数理解研で代表者として開催し、研究情報の交換と共同研究に役立てた。また、広島大学においては、年2回の研究集会を定期的に計6回開催し、(広島大学数理解析セミナー、冬のセミナーなどを開催)、研究成果の公表および研究情報の交換を広くおこなった。これは、今後も継続する予定である。

##### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

1. 吉野正史, Asymptotic property of divergent formal solutions in linearization of singular vector field, Publications in RIMS, 査読有, 出版決定.
2. 吉野正史, W. Balser, Gevrey order of formal power series solutions of inhomogeneous partial differential equations with constant coefficients, Funkcial. Ekvac. , 査読有, 53 (2010), 411-434.
3. 吉野正史, W. Balser, Integrability of Hamiltonian systems and transseries expansions, Math. Zeitschrift, 査読有, 出版決定.
4. 吉野正史, Asymptotic analysis to Goursat problems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, 出版決定.
5. Yoshinari Tanaka, 吉野正史, Predicting the phenotypic response of resource-competing communities to environmental change, Journal of Theoretical Biology, 査読有, 257 (2009), 627-641.
6. 吉野正史, Analytic-Liouville-Nonintegrable Hamiltonian Systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B10 (2008), 225-234.
7. 吉野正史, A. Shirai, Singular solutions of nonlinear partial differential equations with resonances, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 60(1) (2008), 237-263.
8. 吉野正史, T. Gramchev, Normal forms for commuting vector fields near a common fixed point, Proceedings of SPT 2007, World Scientific, 査読有, 巻無し, (2008), 81-91.
9. 吉野正史, Analytic non-integrable Hamiltonian systems and irregular singularities, Annali di Matematica, 査読有, 187, (2008), 555-562.
10. 吉野正史, Divergence and resummation in the normal form theory of vector fields, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B5 (2008), 113-119.
11. 吉野正史, T. Gramchev, Simultaneous reduction to normal forms of commuting singular vector fields with linear parts having Jordan blocks, ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER, 査読有, 58 no. 1 (2008), 263-297.
12. K. Takimoto, Rado type removability result for fully nonlinear PDEs, GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications, Proceedings of International Conference for the 25<sup>th</sup> Anniversary of Viscosity Solutions, 査読有, Vol. 30 (2008), 231-241.

広島大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号:00363034 (H20・研究分担者)

[学会発表] (計 8 件)

1. Masafumi Yoshino, Sectorial solution to semilinear singular partial differential equation, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学.
2. Masafumi Yoshino, Liouville integrability of a certain Hamiltonian system and transseries expansions, Recent Developments in Resurgence Theory and Related Topics, 2010年6月29日, 京都数理解析研究所.
3. Masafumi Yoshino, Transseries expansions of integrals of certain Hamiltonian systems, Festcolloquium in honor of D. Lutz, 2010年3月29日, San Diego, USA.
4. Masafumi Yoshino, Integrability of Hamiltonian systems and transseries expansions, 日本数学会年会, 2010年3月24日, 慶応大学.
5. Masafumi Yoshino, Resummation and analytic continuation of an asymptotic solution of a small denominator problem, New development of asymptotic analysis and dynamical systems, 2009年6月16日, 京都数理解析研究所.
6. K. Takimoto, On the removability of level sets for some fully nonlinear equations, 第26回九州における偏微分方程式研究集会, 2009年1月27日, 九州大学.
7. Masafumi Yoshino, 完全WKB解析による小分母の問題の解析, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東工大.
8. Masafumi Yoshino,  $C^\omega$  Liouville-nonintegrable and  $C^\infty$  Liouville integrable Hamiltonian systems, FORMAL AND ANALYTIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS, 2008年8月9日, Banach center (Poland).

[その他]

ホームページ等

<http://home.hiroshima-u.ac.jp/yoshinom/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

吉野 正史 (YOSHINO MASAFUMI)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号:00145658

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

滝本 和広 (TAKIMOTO KAZUHIRO)