

機関番号：15401

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540173

研究課題名 (和文) 制約条件を伴った半線形方程式の適切性の研究とその応用

研究課題名 (英文) Studies on well-posedness for semilinear evolution equations with constraints and their applications

研究代表者

松本 敏隆 (MATSUMOTO TOSHITAKA)

広島大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：20229561

研究成果の概要 (和文)：半線形発展方程式の適切性の研究をリップシッツ作用素半群の生成定理の研究を通して行った。従来の準縮小半群の生成定理を拡張し、この結果の応用として複素ギンツブルグーランダウ方程式、半導体に関連した移流拡散方程式、2次元ナビエーストークス方程式、強退化放物型方程式の適切性を示した。また、近似理論の研究も行い、従来の準縮小半群に対する収束定理、近似可解性定理、チャーノフ型積公式をリップシッツ作用素半群の場合に拡張した。

研究成果の概要 (英文)：We studied generation theorems of semigroups of Lipschitz operators and well-posedness for semilinear evolution equations. We extended the former results on the generation of quasi-contractive semigroups and applied the obtained results to show the well-posedness of the complex Ginzburg-Landau equation, drift-diffusion equations, 2-dimensional Navier-Stokes equation and strongly degenerate parabolic equations. We also obtained a convergence theorem, an approximation theorem and product formulas of Chernoff type for semigroups of Lipschitz operators.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：制約条件, 半線形方程式, 適切性, リップシッツ作用素半群, 正則性, 近似理論, 積公式

1. 研究開始当初の背景

半線形発展方程式の解の存在を示す場合、方程式を積分方程式に書き換えて、不動点定理を用いて証明する方法が一般点に用いられている。しかしながら、非線形の制約条件(境界条件)や非線形項の冪が高い場合などは、積分方程式には書き換えることは出来ず、積分方程式によるアプローチは有効には働か

ない。実際、人口問題、細胞増殖問題などの生物学に関連した半線形方程式には非線形の制約条件を伴ったものが数多く現れる。このような半線形方程式の適切性に関しては、細胞増殖問題のように初期値について局所リップシッツ評価をみたすものが現れることが多い。このような問題の適切性を解明するためには、一般論である非線形半群論を整備

することが重要であると思われる。このために、研究分担者の小林、連携研究者の田中によって導入されたリプシッツ作用素半群の理論を制約条件を伴った問題へも適用できるように拡張することにより、制約条件を伴った半線形発展方程式の適切性を解明することを目指した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、制約条件を伴った半線形発展方程式の適切性を解明であり、大きく分けて以下の2つからなる。

(1) 生物学に関連した非線形境界条件を伴った半線形発展方程式の適切性の研究：
細胞増殖を記述する線形モデルであるレボヴィッツールピノーモデルのように、解のトレースなどに依存した不連続な境界条件を伴った方程式の場合には、解の初期値に対する依存性に関して、局所リプシッツ評価が成り立つことを研究代表者は以前に示しており、従ってこうした問題を準縮小的な非線形半群論によって取り扱うことは困難である。このような問題も扱えるように非線形半群の一般論を整備するため、線形作用素の定義域で定義された不連続線形作用素(トレース作用素など)を含む形の制約条件を伴った半線形方程式の適切性の解明を目的としている。

(2) 非線形境界条件を伴った非圧縮粘性流体の方程式の適切性の研究：
藤田は、2004年に摩擦を考慮した非線形境界条件を伴った非圧縮ナビエーストークス方程式を考察し、ヒルベルト空間における極大単調作用素の理論を用いて、強解を与える準縮小半群を構成している。バナッハ空間あるいはより一般の非線形境界条件の下では、準縮小半群の理論は適用できない可能性があるため、本研究ではリプシッツ作用素半群の理論の改良を通して、この問題についての適切性および正則性の研究を目的としている。

3. 研究の方法

(1) リプシッツ作用素半群の生成理論の拡張を行う。リプシッツ作用素半群理論は、通常のノルムの代わりに「距離汎関数」についての準消散性の議論を行うため、個々の問題に応じた適切な汎関数を見つける必要がある。 L^2 空間以外の空間ではあまり結果がなかったため、特に L^p 空間における有効なタイプの汎関数の型について調べる。具体例として複素ギンツブルグーランダウ方程式や半導体に関連した移流拡散方程式について考察し、既存の結果を参考にしつつ準消散条件を満たす汎関数の導出を行う。この汎関数に対して、既に得ている生成理論の証明方法を拡張することでリプシッツ作用素半群の生

成理論の拡張し、方程式の適切性の証明を行う。また、非圧縮ナビエーストークス方程式についてもリプシッツ作用素半群による取り扱いを試みる。

(2) リプシッツ作用素半群に対する近似理論の研究を行う。近似理論は、理論的のみならず解の数値シミュレーションを行う際の信頼性の観点からも重要なものであると考えられる。特に、積公式については半群の生成理論を応用して証明を試みる。

(3) 共同研究者との研究打ち合わせに加え、研究集会や学会に積極的に参加し、情報収集を行った。

4. 研究成果

得られた成果はつぎの通りである。

(1) 生成理論の研究

① 論文5において、半線形放物型方程式に応じるリプシッツ作用素半群の特徴付け定理の拡張を行った。特徴付け定理は、解作用素となるリプシッツ作用素半群が存在するための必要十分条件を与えるものである。これにより、従来の生成理論では扱えなかった偏微分方程式もリプシッツ作用素半群で扱うことが可能となった。応用例として、半導体素子のモデル方程式である移流拡散方程式の適切性の別証明を与えた。

② 論文3において、複素ギンツブルグーランダウ方程式の L^p 適切性の研究を行った。従来の研究では、初期値の滑らかさ、非線形項のべきが3次、 p が2以上で弱解、のいずれかの仮定が置かれていた。本研究では、リプシッツ作用素半群の生成定理を用いて、 p についての仮定を1より大きい実数に緩和した上で、 L^p 空間における複素ギンツブルグーランダウ方程式の強解の適切性を証明した。これは、非線形項のべきが臨界指数の場合も含むものである。

③ 論文4において、非線形リプシッツ作用素半群の生成定理を2次元ナビエーストークス方程式の弱解の一意存在に応用した。準縮小半群論で用いられているベニランの積分解に関連した新しい弱解を導入し、この新しい弱解が従来の弱解になっていること並びにリプシッツ作用素半群の生成定理を用いて新しい弱解の一意存在を示した。弱解の一意存在は既知の結果ではあるが、ここで用いられた方法は、流体の研究において従来用いられているものとは異なる新しい方法であり、流体の研究にリプシッツ作用素半群が有用なツールである可能性を示すものである。

④論文2において、多孔性媒質の方程式と保存則の方程式を合わせたタイプの強退化放

物型方程式をノイマン境界条件の下で考察した。BV エントロピー解と呼ばれる新しい弱解の概念を導入し、非線形半群論を用いてこの弱解の一意存在を示した。

(2) 近似理論の研究

① 論文 1 において、半線形放物型方程式に対する近似理論の研究を行い、リップシッツ作用素半群に対するチャーノフ型の積公式を得た。この結果は、準縮小的な半群に対する従来の積公式を、準縮小的でないリップシッツ作用素半群に拡張したものである。この結果の応用として複素ギンツブルグーランダウ方程式の解が、線形部分の微分作用素が生成する半群と非線形項が生成する半群の積の極限として表されることを示した。これは、線形項のみからなる偏微分方程式と、非線形項のみからなる常微分方程式を交互に短時間ずつ繰り返して解くことによって元の方程式の解が得られるという部分ステップ法が複素ギンツブルグーランダウ方程式に対して有効であることを意味し、数値シミュレーションの観点からも興味ある結果である。

② 連携研究者の大春慎之助氏と研究代表者は、積分化半群の非線形摂動に付随する発展作用素の収束定理、近似可解性定理、チャーノフ型積公式の研究を行った。研究代表者らによる特徴付け定理を用いることで、従来のものに比べ、かなり一般的な増大条件の下での収束定理、近似可解性定理の証明が得られた。歯のインプラントに関連した骨改造現象を記述する数理モデルの適切性についても示した。(論文準備中) この成果は、学会発表 4 において講演した。

③ チャーノフ型積公式を非線形リップシッツ作用素半群の場合へと拡張した。近似作用素が多価である場合も許容するという従来よりもかなり一般的な仮定の下で積公式を示した。また、この積公式を 2 次元ナビエーストークス方程式の弱解の存在証明に応用した。これは、ナビエーストークス方程式の弱解の存在証明で用いられる射影法を非線形半群の近似理論の立場から考察したものであり、リップシッツ作用素半群が流体の研究にも有用なツールである可能性を示すものである。この成果は、学会発表 1 において講演した。

(3) 今後の展望

非線形境界条件である 無流れ境界条件を伴った半導体の方程式の研究を進めている。非線形境界条件を方程式に取り込むことにより、解析的半群の非線形摂動問題として定式化できることが解った。但し、線形部分の作用素が生成する解析的半群は時刻 0 での特

異性を持つものであり、既存の非線形半群論は適用できない。このような特異性を持つ問題に対しても適用できるようにリップシッツ作用素半群の生成理論の拡張に取り組むことで、非線形制約条件を持つ多くの半線形方程式の適切性の証明を行うことが今後の目標である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1. Toshitaka Matsumoto and Naoki Tanaka, Product formula for semigroups of Lipschitz operators associated with semilinear evolution equations of parabolic type, J. Approx. Theory, (査読有), (印刷中)
2. H. Watanabe and S. Oharu, BV-entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations, Adv. Differential Equations, 15 (査読有), 2010, 757-800.
3. T. Matsumoto and N. Tanaka, Well-posedness for the complex Ginzburg-Landau equations, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., 32 (査読無), 2010, 429-442.
4. Y. Kobayashi and N. Tanaka, A Lipschitz semigroup approach to two-dimensional Navier-Stokes equations, Nonlinear Anal. TMA, 72 (査読有), 2010, 1820-1828.
5. T. Matsumoto and N. Tanaka, Lipschitz semigroup approach to drift-diffusion systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B15 (査読有), 2009, 147-177.

[学会発表] (計 10 件)

1. 小林良和, 田中直樹, リップシッツ作用素半群の近似定理, 日本数学会, 2011 年 3 月 21 日, 早稲田大学 (東京都新宿区)
2. 松本敏隆, 田中直樹, 半線形放物型方程式に付随するリップシッツ作用素半群に対する積公式, 日本数学会, 2010 年 9 月 25 日, 名古屋大学 (名古屋市)
3. 小林良和, リップシッツ作用素半群と偏微分方程式への応用, 日本数学会, 2010 年 3 月 26 日, 慶応大学 (横浜市)
4. 松本敏隆, 大春慎之助, Characterization and approximation-solvability of semilinear parabolic evolution equations, 第 35 回発展方程式研究会, 2009 年 12 月 24 日, 中央大学 (東京都文京区)
5. 松本敏隆, 複素 Ginzburg-Landau 方程

- 式の L^p 適切性, 愛媛大学解析セミナー, 2009年11月27日, 愛媛大学(松山市)
6. 松本敏隆, Well-posedness of the complex Ginzburg-Landau equation in L^p , RIMS 研究集会「非線形発展方程式と現象の数理」, 2009年10月20日, 京都大学数理解析研究所(京都市)
 7. 松本敏隆, 田中直樹, 複素 Ginzburg-Landau 方程式の L^p 適切性, 日本数学会, 2009年9月25日, 大阪大学(豊中市)
 8. 大春慎之助, 渡邊紘, Solvability of strongly degenerate diffusion systems with nonlocal convective terms, 日本数学会, 2009年9月25日, 大阪大学(豊中市)
 9. 大春慎之助, 渡邊紘, Nonlinear evolution operators for strongly degenerate convective diffusion equations, 日本数学会, 2009年3月26日, 東京大学(東京都目黒区)
 10. 松本敏隆, 田中直樹, Drift-diffusion 方程式へのリップシッツ作用素半群論的接近法, 日本数学会, 2008年9月27日, 東京工業大学(東京都目黒区)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 敏隆 (MATSUMOTO TOSHITAKA)
広島大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 20229561

(2) 研究分担者

小林 良和 (KOBAYASHI YOSHIKAZU)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号: 80092691

(3) 連携研究者

田中 直樹 (TANAKA NAOKI)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号: 00207119

大春 慎之助 (OHARU SHINNOSUKE)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号: 40063721