

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 20 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540174

研究課題名（和文）リーマン面の接続と粘性流体の力学～等角的埋め込みと随伴する  
ポアズイユ流の研究

研究課題名（英文）Continuations of a Riemann surface and dynamics of viscos fluid  
— study of conformal embeddings and associated Poiseuille flow

研究代表者

柴 雅和（SHIBA MASAKAZU）

広島大学・大学院工学研究院・名誉教授

研究者番号：70025469

研究成果の概要（和文）：種数 1 の開リーマン面を同種数の閉リーマン面（トーラス）の中に等角写像するとき、像の補集合の面積とトーラス全体の面積との比の（トーラスをとめる度の）最大値は、細管内を流れる粘性流体の速度ベクトルを表すことを示した。さらに、種数 0 の場合にも粘性流体の速度ベクトルを与える関数を得た。これらの流体の粘性係数 --- いずれの場合にも定数ではない --- を具体的に求め、古典的なポアズイユ流の興味深い一般化を与えることを示した。

研究成果の概要（英文）：Along the study of conformal embedding of an open Riemann surface into a closed surface of the same genus we encountered with interesting functions on a closed disk. The functions are written in terms of the euclidean and hyperbolic (resp. spherical) metrics, in case of genus one (resp. zero). In the present research project we studied these functions from the hydrodynamic viewpoint and showed that they represent Poiseuille flows. We also gave the viscosity in closed forms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：複素解析学

科研費の分科・細目：数学 基礎解析学

キーワード：リーマン面，接続，等角写像，スパン，流体力学，粘性流体，  
ナヴィエ・ストークスの微分方程式，ポアズイユ流

## 1. 研究開始当初の背景

本研究課題の計画立案と遂行に先立って、代表者は専らリーマン面の接続（等角的埋め込み）を研究していた。特に、種数が 0 や 1 である 1 つのリーマン面（単葉型リーマン面あるいは開トーラス）から同じ種数の別のリーマン面の中への等角的埋め込みの全体は完全流体の力学の言葉を用いて簡潔に説明さ

れ、さらに、埋め込みに際して登場する補集合の面積に関わる幾つかの関数は粘性流体の流れとしてよく知られたポアズイユ流に類似の性質をもつことに気づいていた。これらを準備として、ポアズイユ流を複素解析学の立場から考察し、翻ってリーマン面論への貢献の可能性も探りたいというのが当初の企図であった。

## 2. 研究の目的

前項の準備を踏まえて、ポアズイユ流を複素解析学の立場から --- 特に双曲的あるいは球面的距離を基にして --- 考察し、翻ってリーマン面論への貢献の可能性も探りたいというのが研究目的であった。

もう少し具体的に述べよう。単連結平面領域に対するリーマンの写像定理に始まる等角写像論は、種数0のリーマン面(単葉型リーマン面)へと拡張され、水平截線領域や垂直截線領域などさまざまな形の標準領域やそれらの関係を述べたグルンスキーやシッフアーの面積定理やスパンなど多くの成果に至ったことは良く知られたとおりである。種数が1のリーマン面に対する同様の問題は、等角的に埋め込まれた像を考えるべき閉リーマン面(トーラス)の複素解析的多様性により、等角埋め込み像が常にリーマン球面という単一のリーマン面で考えられてきた種数0の場合と本質的に異なる様相を呈する。すなわち、等角埋め込み像とトーラスは並行して考える問題が生じる。代表者はこの問題を解決して、埋め込まれた面の中で像に含まれない部分(直感的に言えば最初の開リーマン面に付加された部分)の面積が種数0のときと同様の性質を持つことを示した。特に重要なのは、1つの埋め込み先に対して考えられる付加面積の最大値である。それはトーラスを変数とする関数とも考えられるが、それが細い管の中を流れる粘性流体の速度ポテンシャルに似た形を持つことにも気づいた。さらに、種数1の場合に、付加部分の面積が全面積に対して占める割合の最大値 --- ここでは仮に面積比関数と呼ぼう --- もまた興味深い関数であることを示し、双曲的幾何学の言葉で書けば美しい形で記述されることも示した。

これにヒントを得て種数0の場合にも類似の性質を持つ関数を構成した。

ともに、ユークリッド距離と双曲距離や球面距離などの非ユークリッド距離との比として記述されることも知った。

この研究課題ではこれらの考察や結果を受けて、単葉型のあるいは種数が1の場合について得られた面積に関わる関数が流体力学的に興味ある性質を持つのではないかと予想し、その証明を目論み、対応する粘性流体の性質(粘性係数)を詳しく調べようとした。

## 3. 研究の方法

まず、粘性係数が一定であるという前提をはずしてナビエ・ストークスの方程式を表示し、この非線形方程式をこれまでのリーマン面の研究で既に得ていた関数が満たすとして、粘性係数を未知関数とする新しい偏微分方程式を解く。この偏微分方程式は、双曲

的距離の場合にも球面距離の場合にも、いわゆる特性曲線の方法を用いてこの方程式は解けて、粘性係数を具体的に求める。

## 4. 研究成果

研究の背景で述べたように、代表者は、種数が1の開リーマン面を同じ種数の閉リーマン面(トーラス)の中に等角的に埋め込むとき、自然に生じる補集合の面積がトーラス全体のなかで占める「割合」をトーラス毎に上限をとった関数(前項で面積比関数と呼んだもの)が双曲的幾何学の言葉で書けば回転放物曲面を描くことを踏まえ、本研究課題においては、種数1の場合の面積比関数が --- 種数0, 1の場合の面積関数がそのままの形でポアズイユ流を表すことに応じて --- 粘性流体力学的な性質をもつことを確かめ、古典的なポアズイユ流のように粘性が一定ではないが、非定数粘性係数をもつ流れの速度ベクトルポテンシャルに対応することを示した。粘性係数を具体的に求めた。さらに、種数0の場合には、面積比ではないがユークリッド距離と球面距離との比である関数を考察し、やはり非定数粘性係数をもつ流体の流れを記述することを示し、粘性係数を具体的に求めた。

面積を表す関数のうちで、種数が1の場合に登場し双曲的距離によって記述される関数については、ほぼ所期の目的を達した。すなわち、この関数がある粘性流体のポアズイユ流の速度ポテンシャルであることを示した。またその粘性係数を具体的に求め、非定数であることを見た。非ユークリッド的に得られた関数を実はユークリッド的にも興味ある性質を持つことも分かった。この事実は当初期待していたもの以上の成果であった。これらは古典的なポアズイユ流の興味深い一般化を与える。ただし、実在粘性流体との対応についてはまだ十分に解明されていない。もう1つの非ユークリッド的な関数、すなわち球面距離によって記述された速度ポテンシャルについても上と同様に進められることが分かった。このように2つの非ユークリッド距離に対して個別に考察した速度ポテンシャルの相互の関係、対応する粘性流体の互いの関係など、あらたな研究課題も生まれた。リーマン面論との関係あるいは等角写像論への応用についてはまだ問題が残されているし、より非ユークリッド幾何学的な考察をする問題もある。これらの、本研究課題の遂行過程から生まれた興味深い研究課題については今後の展開に強く期待するところである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 20 件)

1. Hataya, Y., Ito, M. and Shiba, M.:  
Poiseuille flow with spherical paraboloid velocity, 査読有. Trans. Inst. Math. National Acad. Sci. Ukraine. (to appear).
2. Matsui, K. and Maitani, F.:  
Construction of Shiba behavior spaces on an open Riemann surface of infinite genus 査読有. J. Math. Soc. Japan (to appear).
3. Hataya, Y., Ito, M. and Shiba, M.:  
A Poiseuille flow of an incompressible fluid with nonconstant viscosity, 査読有. Nonlin. Dyn. and Systems Theory, 13(2013), 47-53..
4. Maitani, F. and Taniguchi, M.:  
A condition for a circle domain and an infinitely generated classical Schottky group Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis, 査読有. Tohoku Univ. Press, 2013, 169-175.
5. Masumoto, M.:  
Conformal and holomorphic mappings of once-holed tori, 査読有. Global J. Math. Sci., 1(2012), 24-30.
6. Hataya, Y.:  
A remark on Beale-Nishida's paper, 査読有, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica New Ser. 6(2011), 293-303.
7. Hamano, S., Maitani, F. and Yamaguchi, H.:  
Variation formulas for principal functions II: Applications to variation for harmonic spans, 査読有 Nagoya Math. J. 204(2011), 19-56.
8. Tokura, Y. and Maekawa, H.:  
Direct numerical simulation of impinging shockwave/transitional boundary layer interaction with separation flow., 査読有. J. Fluid Sci. Tech., 6 (2011), .765-779.
9. Tokura, Y. and Maekawa, H.:  
Spatial DNS of an isothermal flat plate supersonic transitional boundary layer with/out impinging shock wave, 査読有. J. Fluid Sci. and Tech., .6 (2011), 30-44.
10. Masumoto, M.:  
Corrections and complements to "Once- holed tori embedded in Riemann surfaces", 査読有 Math. Z.. 267 (2011) , 869-874.
11. Bah, A.M., Ito, M. and Maitani, F.:  
Conformal mapping between rectangles with a crossing slit. 査読有. Bull, Kyoto Inst. Tech., 4(2010), 1-8.
12. Matsui. K., and Maitani, F.:  
A Sequence of behavior spaces and the structure of its convergent space, II 査読有. Bull. Kyoto Inst. Tech. 4(2010), 9-32.
13. Masumoto, M.:  
Measuring the sizes of handles of Riemann surfaces, 査読有. Proc. 13th Conf. Real and Complex Analysis Hiroshima, 2010. 95-100.
14. Gao, M. and Ito, M.:  
A Maple package for verifying ultra-discrete soliton solutions, 査読有. Comp. Phys. Commun., 180(2009), 1196-1205.
15. Hataya, Y. and Kawashima, S.  
Decaying solution of the Navier-Stokes flow of infinite volume without surface tension 査読有. Nonlin. Anal. 71 (2009). e2535-e2539.
16. Hataya, Y.:  
Decaying solution of the Navier-Stokes flow without surface tension , 査読有. J. Math. Kyoto Univ., 49(2009), 691-717.
17. Masumoto, M.  
Conformal mappings of once-holed tori into Riemann surfaces of positive genus, 査読有. Proc. 16th Internat. Conf. on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications , 2009, 166-171.
18. Masumoto, M.:  
Holomorphic mappings and basic extremal lengths of once-holed tori, 査読有. Nonlin. Anal., 71(2009), e1178-e1181.
19. 下村 哲、伊藤 雅明:  
コンピュータを活用した数学的モデリング (II) --- 感染症流行モデルを教材として --- 査読有. 数学教育学研究, 14(2008), 119-128.
20. 米谷 文男:  
被覆面からの数値等角写像, 査読有. 数理解析研究所講究録 1626(2009),. 28~43.

[学会発表] (計 48 件)

1. 渡辺 大輔, 前川 博:

超音速境界層の遷移における流入攪乱スケールの影響, 第 26 回数値流体力学シンポジウム. 2012 年 12 月 19 日. 東京都.

2. Ito, M and Gao, M.:

Invariants for the  $k$ th-order Lyness max equation, 6th World Congress of Nonlinear Analysts, June 25, 2012. Univ. Athens, Greece.

3. Hataya, Y.:

Solution Formula of Stokes Operator with Stress Free Boundary Conditions, 6th World Congress of Nonlinear Analysts, June 25, 2012. Univ. Athens, Greece.

4. Masumoto, M.

Handle conditions and basic extremal lengths of marked once-holed tori, 6th World Congress of Nonlinear Analysts, June 25, 2012. Univ. Athens, Greece.

5. 幡谷 泰史, 伊藤 雅明, 柴 雅和:

非ユークリッド的 Hagen-Poiseuille 法則, 平成 23 年度 日本数学会 中国・四国支部例会, 2012 年 1 月 22 日. 岡山大学.

6. 米谷 文男:

無限周期条件を満たす柴の挙動空間の存在について, リーマン面・不連続群論研究集会, 2012 年 1 月 8 日. 名古屋大学.

7. 幡谷 泰史:

Decay properties of free surface flow without surface tension effect, 若手による流体の基礎方程式研究集会. 2012 年 1 月 5 日. 名古屋大学.

8. 増本 誠:

リーマン面の接続と射影構造, 研究集会「リーマン面論の展望」, 2011 年 12 月 21 日. 山口大学.

9. Maitani, F.:

A condition for an infinitely generated Schottky group to be classical, 第 19 回無限次元複素解析国際会議, 2011 年 12 月 11 日. 広島市.

10. 柴 雅和:

Riemann 面の等角写像と Poiseuille 流, 等角写像論・値分布論研究集会, 2011 年 12 月

4 日. 金沢大学.

11. 増本 誠:

種数有限な開リーマン面のコンパクト接続のなす空間, 等角写像論・値分布論研究集会, 2011 年 12 月 4 日. 金沢大学.

12. 増本 誠:

Spaces of compact continuations of Riemann surfaces I (compactness), and II (connectedness), ポテンシャル論セミナー, I: 2011 年 11 月 18 日, II: 11 月 25 日. 名城大学.

13. 幡谷 泰史, 伊藤 雅明, 柴 雅和:

球面的距離により修正された Poiseuille 平成 23 年度日本数学会 秋季総合分科会 関数方程式論分科会, 2011 年 10 月 1 日. 信州大学

14. Hataya, Y.:

Decay estimates of viscous surface flow without capillary, Acad. Sinica seminar, 2011 年 3 月 14 日. 中央研究院數學所, 台南, 中華民國.

15. Hataya, Y.:

Decay estimates of  $v$  2011 年 3 月 16 日. viscous surface flow without capillary, 臺灣国立交通大学, 台南, 中華民國.

16. 柴 雅和, 伊藤 雅明, 幡谷 泰史:

非古典的な Poiseuille 流, 平成 22 年度日本数学会中国・四国支部例会, 2011 年 1 月 30 日. 鳴門地域地場産業振興センター.

17. 幡谷 泰史:

自由表面を伴う粘性流体の解の減衰評価, 第 8 回浜松偏微分方程式研究集会, 2010 年 12 月 20 日. 静岡大学.

18. Hataya, Y.:

Decay estimates of Navier-Stokes flow with free boundary. Regularity aspects of PDE --- A week for Wojciech Zajaczkowski, Banach Center, Sept. 05, 2010. Bedlewo, Poland.

19. Hataya, Y.:

Unbounded in  $L^1_{x,t}$  solution of a free boundary problem, 2009 International Workshop on Diff. Equations and Their Appl. 2009 年 12 月 19 日. 台南, 中華民國.

20. Tokura, Y., Maekawa, H., Watanabe, D. and Ogata, Y.

Effects of Wall temperature condition on

the evolution of a supersonic turbulent boundary layer, Proc. 6th International Conference on Flow Dynamics, Nov. 6, 2009. Sendai.

21. 弘中 一也, 前川 博, 高見 創, 出川 智啓:

壁近傍の渦と誘起された二次渦により発生する音響場に関する研究、日本機械学会山梨講演会。2009年10月24日。甲府市。

22. 戸倉 裕介, 前川 博, 渡辺 大輔, 尾形 陽一:

超音速平板境界層における乱流遷移機構の空間発展DNSと解析 日本機械学会中国四国支部第47期総会, 2009年3月6日。山口市。

23. 前川 博, 上原 敦, 渡辺 大輔:

圧縮性平板チャネル乱流の超大規模構造の研究、第22 回数値流体力学シンポジウム, 2008年12月19日。東京都。

24. Shiba, M.:

Flows on a Riemann surface extendable beyond the ideal boundary and generalizations of the Poiseuille flow, IWPT (International Workshop on Potential Theory) Dec. 18. 2008. Gakushuin Univ, Tokyo.

25. 米谷 文男:

平面領域の正則変動の下でのスパンの動き, 等角写像論・値分布論合同研究集会, 2008年11月29日。金沢大学。

26. 濱野 佐知子, 米谷 文男, 山口 博史:

$L_0$  主関数に関する2階変分公式と開リーマン面のスパンの動きについて, 日本数学会, 2008年9月25日。東京都。

27. Hataya, Y.:

Non preserving property arising in a free boundary problem, Workshop Math. Fluid Dynamics, Sept. 9, 2008. Darmstadt, Germany.

28. Hataya, Y.:

Non preserving property arising in a free boundary problem. Parabolic and Navier-Stokes equations, Sept. 3, 2008. Bedlewo, Poland.

29. 前川 博, 山田 欣弘, 渡辺 大輔:

圧縮性円管流の乱流構造の研究、日本流体力学会年次大会, 2008年9月7日。神戸市。

30. Masumoto, M.:

Conformal mappings of noncompact Riemann surfaces of genus one, 16th International Conf. on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Appl. July 28, 2008. 東国大学校, 慶州市, 大韓民国。

31. Hataya, Y. and Kawashima, S.:

Global solution of Navier-Stokes flow without surface tension, World Congress of Nonlinear Analysts, July 8. 2008. Orlando, U.S.A.

32. Gao, M. and Ito, M.:

Verification of ultradiscrete soliton solutions by computer algebra system, 5th World Congress of Nonlinear Analyst, July 8, 2008. Orlando, U.S.A.,

33. Shiba, M.:

A generalization of the Hagen-Poiseuille flow, 5<sup>th</sup> World Congress of Nonlinear Analysts, , July 8, 2008. Orlando, U.S.A.

34. Masumoto, M.:

Holomorphic mappings of open Riemann surfaces of genus one, 5th World Congr. Nonlinear Analysts, . July 8, 2008. Orlando, U.S.A.

35. Maitani, F.

Numerical conformal mappings from covering surfaces, International Short Joint Research Workshop “Study on Non-Analytic and Univalent Functions and Applications” May 23. 2008. Kyoto.

[その他]  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

柴 雅和 (SHIBA MASAKAZU)  
広島大学・大学院工学研究院・名誉教授  
研究者番号: 70025469

### (2) 研究分担者

伊藤 雅明 (ITO MASA AKI)  
広島大学・大学院工学研究院・准教授  
研究者番号: 10116535

幡谷 泰史 (HATAYA YASUSHI)  
山口大学・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号：20294621

米谷 文男 (MAITANI FUMIO)  
立命館大学・情報理工学部・講師  
研究者番号：10029340

前川 博 (MAEKAWA HIROSHI)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・  
教授  
研究者番号：90145459

増本 誠 (MASUMOTO MAKOTO)  
山口大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：50173761

(3) 連携研究者  
( )

研究者番号：