

機関番号：17401

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540180

研究課題名 (和文) シュタイン空間における因子と有理型凸性

研究課題名 (英文) DIVISORS AND MEROMORPHIC CONVEXITY IN A STEIN SPACE

研究代表者

阿部 誠 (ABE MAKOTO)

熊本大学・大学院生命科学研究部・准教授

研究者番号：90159442

研究成果の概要 (和文)：

シュタイン空間は、十分多くの正則関数が存在する数学的な対象である。そして、 n 個の複素数の組全体の空間 \mathbf{C}^n 内の擬凸領域はシュタイン空間の典型的な例である。この研究において、有理型凸性と因子に関連して、シュタイン空間における一般化された有理型近似定理、シュタイン軌道体内の岡・グラウエルトの原理を満たす領域の局所シュタイン性、強い円板的性質とルンゲ性の関係について、いくつかの新しい結果を得た。

研究成果の概要 (英文)：

A Stein space is a mathematical object on which there exist sufficiently many holomorphic functions. A pseudoconvex domain in the space \mathbf{C}^n of the n -tuples of complex numbers is a typical example of a Stein space. In this course of studies, related to the meromorphic convexity and divisors, some new results are obtained on the generalized meromorphic approximation theorem in a Stein space, on the local Steinness of a domain in a Stein orbifold satisfying the Oka-Grauert principle, and on the relation between the strong disk property and the Rungeness.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素解析

1. 研究開始当初の背景
多変数関数論の研究を方向付けた源流のひ

とつは Julia の予想 (1926) である。それは「正則関数族のファトゥ集合は正則領域で

あろう」というものであった。この予想を解決するために、Cartan-Thullen (1932) により、正則凸性の概念が導入された。また、Barth (1971) により、複素多様体 X 上の正則関数族 F のファトゥ集合 $D(F)$ は擬凸であり、したがって、Docquier-Grauert (1960) の定理により、 X がシュタイン多様体であれば、 $D(F)$ はシュタインであり、これが当初の Julia の予想の解決であった。

しかし、Abe-Furushima (2000) は、 X がシュタイン多様体であれば、 $D(F)$ は単にシュタインであるという以上に、もっと強く、有理型 $0(X)$ -凸であることを証明した。さらに、Abe (2005) は、シュタイン多様体 X の開集合 D について、 D の有理型 $0(X)$ -凸性と $D(F) = D$ なる X 上の正則関数族 F が存在することの同値性を証明した。これらのことがシュタイン多様体における Julia の予想の真の解決というべきものである。この特徴付けを得るために、被約シュタイン空間におけるひとつの有理型近似定理を証明し、被約シュタイン空間 X の開集合の有理型 $0(X)$ -凸性を考察した。

また、Abe (2006) は、シュタイン多様体 X の開集合 D が単連結かつ有理型 $0(X)$ -凸であれば、 D は強い円板の性質をもつことを証明し、さらに、Nishino (1966), Duval (1991) の結果を援用することにより、 \mathbf{C}^n の開集合 D の多項式凸性が \mathbf{C}^n 内の任意の複素直線 L と D の共通部分 $L \cap D$ が単連結であるという性質によって特徴付けられるかどうかを問う Bremermann (1958) の問題を否定的に解決することができた。これらのことは、開集合に対する有理型凸性や有理型 $0(X)$ -凸性の概念の重要性を認識させる。

2. 研究の目的

特異点をもつ一般のシュタイン空間 X に対する Levi の問題については、長い年月の経過と多くの研究の存在にもかかわらず、満足すべき十分な結果は知られていない。すなわち、Docquier-Grauert (1960) の定理に相当する結果は、現在でも得られていない。したがって、シュタイン空間の構造の解明を目指すというだけで、すでに多くの困難が予想される。次の有理型凸性と因子に関連するふたつの問題は、もし解決されれば、有力な手がかりとなる可能性がある。

問題 1. 被約シュタイン空間 X の開集合 D について、 D 内の任意のコンパクト集合 K の D における有理型凸被がコンパクトであれば、 D はシュタインか？

問題 2. 被約シュタイン空間 X の開集合 D について、標準的な写像 $H^1(D, 0) \rightarrow H^1(D, M)$ が零写像であれば、他の付加的な条件の下で、 D はシュタイン

か？

Hirschowitz (1971) は、 X がシュタイン多様体のとき、 X の開集合 D のシュタイン性が D 内の任意のコンパクト集合 K の有理型凸被がコンパクトであるという性質によって特徴付けられることを指摘したが、 X が一般の被約シュタイン空間の場合が未解決である。一方、被約シュタイン空間 X の開集合 D について、 $H^1(D, 0) \rightarrow H^1(D, M)$ が零写像という仮定よりも強く、 $H^1(D, 0) = 0$ などの仮定をおくとき、他の付加的な条件の下で、 D のシュタイン性を証明するという種類の論文が、おおよそ 1965~1985 年頃に多く書かれている。例えば、Markoe (1977) と Silva (1978) により、 $H^1(D, 0) = 0$ かつ D がシュタイン開集合の増大列の極限であれば、 D はシュタインである。

Abe (2007) は、 n 次元シュタイン多様体 X の開集合 D が、条件 $\dim H^k(D, 0) < +\infty$ ($2 \leq k \leq n-1$) をみたすとき、 D のシュタイン性が、標準的な写像 $\text{Div}(D) \rightarrow \text{Pic}(D)$ の全射性によって特徴付けられることを証明した。ただし、 $\text{Div}(D)$ は D 上のカルチエ因子群、 $\text{Pic}(D)$ は D のピカル群を表す。この結果はシュタイン多様体に限定されてはいるが、その証明において、必ずしも被約でない一般のシュタイン空間の考察が不可避である。また、それは問題 2 の解決のためのひとつのアプローチの仕方も暗示しており、このことはシュタイン空間における有理型凸性と因子群の関係を示唆するものである。一方、Hamano (2007) も有理凸性と因子の関係を示す結果を得た。

以上のような観点に立って、シュタイン空間・シュタイン多様体において、特に、因子群の振舞いに注目しつつ、有理型凸性に関連する解析的または幾何的性質についての研究をさらに発展させることを意図した。

3. 研究の方法

(1) Abe (2007) は、 n 次元シュタイン多様体 X の開集合 D が、条件 $\dim H^k(D, 0) < +\infty$ ($2 \leq k \leq n-1$) をみたすとき、 D のシュタイン性が標準的な写像 $\text{Div}(D) \rightarrow \text{Pic}(D)$ の全射性によって特徴付けられることを証明したが、 X が特異点をもつシュタイン空間の場合にも、この事実が成り立つかどうかについては未解決であった。ただし、 $\text{Div}(D)$ は D のカルチエ因子群、 $\text{Pic}(D)$ は D のピカル群を表す。少なくとも、シュタイン空間 X の特異点がすべて孤立した商特異点の場合には、このことは正しいと予想され、それが可能であれば、少なくとも同じ状況のもとに、問題 2 の解決の手がかりにも

なるものと想像される。このような状況の下に、先ず、シュタイン軌道体、すなわち、特異点がすべて商特異点であるようなシュタイン空間 X の開集合 D について考察することにした。問題2の解決の前に、 $H^1(D, 0) = 0$ なる仮定よりも弱く、また、 $H^1(D, 0) \rightarrow H^1(D, M)$ が零写像という仮定に替えて、 D が複素リー群 G に関する岡・グラウエルトの原理をみたすという仮定をおき、 D のシュタイン性を導くことを試みた。複素リー群 L の取り方によっては、有理型関数の考察に類似した場合があり、問題2の解決に近づくことができるからである。また、Abe (2007)の方法では、 $\dim X \geq 3$ の場合には、 X のコーヘン・マコーレー性の仮定が必要であるが、その仮定を除くために、証明方法の大幅な変更を試みた。一方、問題1に関連して、ヴェイユ・岡の有理近似定理のシュタイン多様体・シュタイン空間への異なるふたつの一般化としての Hirschowitz (1971) および Abe (2005) の有理型近似定理を、被約シュタイン空間 X において、ピカル群 $\text{Pic}(X)$ の部分半群 G に関する一般化された有理型近似定理として統合することに成功していたが、この結果の学術雑誌への掲載を期するために、証明等の詳細を再検討した。

- (2) 島 (研究分担者) は、商空間 \mathbf{C}^2/G (G は $GL(2, \mathbf{C})$ の小型有限部分群) の極小正規解析的コンパクト化における境界の重みつき双対グラフの分類の大枠を完成させたが、これを単純楕円型特異点・カスプ特異点等をもつ類似の空間の研究に発展させることを目標に、引き続き、特異点の研究を行った。

4. 研究成果

- (1) 阿部 (研究代表者) の得た主要な研究成果は以下のものであり、それらは問題1, 2の解決のための緒である。

- ① 被約シュタイン空間 X において、ピカル群 $\text{Pic}(X)$ の部分半群 G に関する一般化された有理型近似定理を証明することにより、Hirschowitz (1971) と Abe (2005) による異なるふたつの有理型近似定理を統合した。内容の概要は報告集「Function Spaces in Complex and Clifford Analysis」に掲載され、詳細は学術雑誌「Toyama Mathematical

Journal」に掲載された。

- ② 純 n 次元被約シュタイン空間 X の開集合 D が2条件 (i) $H^k(D, 0) = 0$ ($2 \leq k \leq n - 1$), (ii) 正の次元の複素リー群 G が存在して $H^k(D, 0^G) \rightarrow H^k(D, (E^\infty)^G)$ は準単射である、をみたすための必要条件に関する新しい結果を得た。特に、 X がシュタイン軌道体の場合、この2条件をみたす D は局所シュタインであることを証明した。このことは、2次元シュタイン多様体の領域のシュタイン性の岡・グラウエルトの原理による特徴付けに関する Kajiwara-Nishihara (1979) の定理の初めての高次元化であるとともに、シュタイン軌道体の領域の場合への一般化である。これらの内容の概要を研究集会「18th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications」で発表した。また、内容の詳細はインターネット上の学術雑誌「Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 4 (Online First)」に掲載された。

- ③ R を単葉型開リーマン面、 D を R の開集合とすると、 D が R において強い円板的性質をみたすことと、 D の任意の連結成分が R においてルンゲであることの同値性を証明した。また、この事実の準単葉型1次元シュタイン空間への一般化を与えた。更に、必ずしも単葉でない開リーマン面に対しては、この同値性が成立しないことを示す反例を与えた。これらの内容の概要を研究集会「13th Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima」で発表した。

- (2) 島 (研究分担者) は以下の研究成果を得た。

- ① 2次元複素アフィン空間 \mathbf{C}^2 の2次一般線形群 $GL(2, \mathbf{C})$ の小型有限部分群 G による商空間 \mathbf{C}^2/G の極小正規解析的コンパクト化における境界の重みつき双対グラフの分類に関する研究の概要を研究集会「第51回函数論シンポジウム」で発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Makoto Abe, Domains which satisfy the strong disk property in a Stein manifold, The Proceedings of the 13th

Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima (2010), 2010 (Y. Mizuta, eds.), Hiroshima University, pp. 1-4, 2011, 査読無

- ② Makoto Abe, Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein space, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Ser. 4 (Online First), Published Online: October 28, 2010, DOI: 10.1007/s10231-010-0170-1, 査読有
- ③ 阿部 誠, Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, pp. 61-62, 2010, 査読無
- ④ Makoto Abe, Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein orbifold, *Abstract Book: 18th ICFIDCAA, 18th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications*, University of Macau, p. 1, 2010, 査読無
- ⑤ Makoto Abe, Meromorphic approximation theorem with respect to a semigroup of holomorphic line bundles in a Stein space, *Toyama Mathematical Journal*, Vol. 32, pp. 41-57, 2009, 査読有
- ⑥ 島 唯史, C^2/G の解析的コンパクト化について, 第 51 回函数論シンポジウムアブストラクト, pp. 47-52, 2008, 査読無
- ⑦ 阿部 誠, 成績評価における評点の算出のためのひとつの方法, *日本数学教育学会高専・大学部会論文誌*, Vol. 15, no. 1, pp. 89-96, 2008, 査読有
- ⑧ Makoto Abe, Meromorphic approximation in a Stein space, *Function Spaces in Complex and Clifford Analysis* (H. S. Le and W. Tutschke, eds.), National University Publishers Hanoi, pp. 100-105, 2008, 査読無

[学会発表] (計 6 件)

- ① Makoto Abe, Domains which satisfy the strong disk property in a Stein manifold, *The 13th Conference on Real and Complex Analysis in Hiroshima*, 広島大学, 東広島市, 2010 年 12 月 20 日
- ② 阿部 誠, Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域, 日本数学会 2010 年

度秋季総合分科会函数論分科会, 名古屋大学, 名古屋市, 2010 年 9 月 23 日

- ③ Makoto Abe, Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein orbifold, 18th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, University of Macau (澳門大学), 中華人民共和國澳門特別行政區, 2010 年 8 月 14 日
- ④ 阿部 誠, Stein 空間内の Oka-Grauert の原理をみたす領域, *Hiroshima Potential Seminar*, 広島大学, 東広島市, 2010 年 7 月 23 日
- ⑤ Makoto Abe, Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains of a Stein orbifold, *Seminario di Matematica, Scuola Normale Superiore di Pisa* (ピサ高等師範学校), イタリア共和国ピサ市, 2008 年 10 月 17 日
- ⑥ 島 唯史, C^2/G の解析的コンパクト化について, 高知大学, 高知市, 2008 年 10 月 12 日

[その他]

ホームページ等

<http://se.kcn-tv.ne.jp/users/mabe/works.htm>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 誠 (ABE MAKOTO)

熊本大学・大学院生命科学研究部・准教授

研究者番号: 90159442

(2) 研究分担者

島 唯史 (SHIMA TADASHI)

広島大学・大学院工学研究院・准教授

研究者番号: 30226196