様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25 年　5 月　30 日現在

機関番号：17601
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008　～　2012
課題番号：20540181
研究課題名（和文）　非線形シュレディンガー方程式の特異性解析

研究課題名（英文）　Singularity analysis on the nonlinear Schrödinger equations

研究代表者
北　直泰（KITA　NAOYASU）
宮崎大学・教育文化学部・准教授
研究者番号：70336056

研究成果の概要（和文）：非線形シュレディンガー方程式の初期値問題において、初期データがδ関数の重ね合わせで与えられているときに、時間大域解の存在および非存在に関する結果を得た。特に初期データが 3 つのδ関数の重ね合わせで記述されているときには、その台の配置によって時間大域解の存在証明の難易度が変わることがわかった。また、初期データにδ関数のような具体的な超関数を与えることによって、モードの生成などのような非線形現象に起因する解の素性がある程度把握できることもわかった。

研究成果の概要（英文）：We obtained the global existence and non-existence of the solutions to the Cauchy problem of nonlinear Schrödinger equations. Remark that, in our research, the initial data consists of superposition of δ-functions. In particular, when the initial data consists of three δ-functions, we observe that the difficulty of the proof for global existence changes dependently on the distribution of the δ-functions. Furthermore, giving a concrete distribution like δ-functions, we see that certain feature of solutions, e.g., generalization of new modes, which is typically caused by nonlinear phenomena.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	900, 000	270, 000	1, 170, 000
2009 年度	800, 000	240, 000	1, 040, 000
2010 年度	600, 000	180, 000	780, 000
2011 年度	600, 000	180, 000	780, 000
2012 年度	600, 000	180, 000	780, 000
総　計	3, 500, 000	1, 050, 000	4, 550, 000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：非線形現象

１．研究開始当初の背景

非線形シュレディンガー方程式の初期値問題について、その創世記に遡ってみると、非線形項のベキの大きさを適宜設定することで、regularity 1 のソボレフ空間 H^1 において時間局所解が構成され、エネルギー保存則によって時間大域解の存在が示された（Ginibre-Velo）。その後、L^2 空間に属する初期データに対しても時間局所解が構成されて、質量保存則によって時間大域解の存在

が示されている (Y.Tsutsumi)。このように，偏微分方程式の初期値問題については、物理的な要請と時間局所解をつないで時間大域解を構成する目的から、その保存量に馴染んだ関数空間解が構成されることが多い。もちろん純数学的な興味からH^1空間やL^2空間以外のソボレフ空間において時間大域解が存在するのか否かというテーマで研究が進められたこともある（例えば、Pecher、Hayashi-M.Tsutsumi 、 Ozawa-Nakamura など）。ただし、ここで紹介した研究においては、すべてソボレフ空間の指数が 0 以上であるとの仮定が設けられている。

では、データの属する関数空間が「負の」ソボレフ指数を有する場合に、非線形シュレディンガー方程式の解について何が言えるのであろうか。この問いかけに対して「解の非適切性」の結果を与えた研究者は、Kenig-Ponce-Vega および Crist-Colliander-Tao である。彼らの結果では、物理学や工学でよく登場する状況、すなわち、空間 1 次元で非線形項のベキが 3 の場合を取り扱っている。Kenig-Ponce-Vega は初期データとして特に δ 関数のように特異性が強いものを課したときに、解の適切性が成り立たなくなることを示している。さらに、彼らは focusing case において、ソリトン解に関するスケーリングやガリレイ変換についての性質を巧みに利用することで、H^s (ただし s < 0) 空間における解の非適切性を示している（より具体的には、初期データから解を対応させる写像の広義一様連続性が破綻する)。また、Crist-Colliander-Tao は defocusing case において、時刻∞付近での解の漸近形を利用して、H^s (ただし s < 0) 空間における解の非適切性を示している。

以上、解の適切性に関する既存の結果を急ぎ足で概観して、大雑把に言えることを次の表にまとめる。ただし、この表において s はソボレフ空間の regularity 指数、n は空間次元、p は非線形項のベキである。

	$1<p<\frac{n-2s+4}{n-2s}$	$\frac{n-2s+4}{n-2s} \leqq p$
s≧0	局所解は適切	?
s < 0	?	局所解は非適切

本科学研究費による研究では、上の表の左下部分、つまり、ソボレフ空間 H^s （s < 0）における解の適切性に関する結果を得ることを目的としている。部分的な結論として、初期データが δ 関数（あるいは台が所々に分布する δ 関数の重ね合わせ）の場合には、時間局所解が存在すること、および非線形項に含まれる係数の条件によって解が時間大域的なものになることを証明することができた。負のソボレフ指数をもつ関数空間で非線形シュレディンガー方程式の解の適切性を示す方法としては、Bourgain をはじめ Kenig-Ponce-Vega、Bejenaru-Tao らが用いたフーリエ制限ノルムによるものが名高い。しかし、この方法は、非線形項がu^2や$\bar{u}^2$のような単純な 2 乗ベキ、あるいは$|u|^2 u=\bar{u}u^2$のような 3 乗ベキである場合にしか機能しない。それは、これらの非線形項に対してならフーリエ変換の畳み込み表現を利用できるからである。フーリエ制限ノルムを利用する評価は本研究で取り扱いたい分数ベキの非線形項とは相性が悪い。

２．研究の目的

負のソボレフ指数をもつ関数空間に属するような初期データに対して、非線形シュレディンガー方程式は①解を持つのか、②解を持つとすればその解は何等かの関数空間で一意的なのか、③安定性についてはどうか、④さらに時間局所解を時間大域的につないでいくことは可能か、という問題設定のもとで本研究を進めた。これは物理学的にはエネ

ルギーや質量のような保存則が意味を持たなくなるような枠組みで理論を構築することになる。しかし、方程式がその程度一般的なデータに対して（適切性が成り立つという意味で）自然な解を保持しえるのかという純数学的な興味から、このような超関数の枠組みで方程式を解いてみたいという衝動に駆られた。

本研究ではδ関数のようなきわめて具体的な超関数を初期データにもつ解を取り扱っている。私見であるが、このような極端な関数を考える意味は十分にあると考えている。δ関数を尖鋭度の高い関数の極端な状態と捉えれば、本研究で見つかった解の表現を通して、通常のレギュラリティーの高いデータの振る舞いを推測できるであろう。実際に、初期データがδ関数であるが故に非線形シュレディンガー方程式の解の表現として極めて具体的なものが導かれた。この表現から初期データの特異性が非線形効果を通してどのように解に影響を及ぼすのかを見て取ることができる（モードの生成効果など）。

ソボレフ空間 H^s（s < 0）のような広い枠組みの中で解を捉えることは、非線形項の評価で失敗することが多い。実際、負の指数をもつソボレフ空間において、分数ベキの非線形項に対してうまく閉じるような評価方法は今のところ開発されていない。（ただし、関数に球対称性を課せば、うまく処理できる評価が Hidano によって開発されている―微分の吸い込みが起こる Strichartz 型評価。だが、本研究では初期データとして台が $\mathbb{R}^n$ 空間内に点在する複数のδ関数を想定しているので、関数の球対称性がはなから崩れている。）このような状況において、超関数の枠組みのもとでいかに非線形項の評価を行うべきなのか、それが本研究の最大の課題であった。

３．研究の方法

負の指数をもつソボレフ空間全体の中で非線形シュレディンガー方程式の解を校正することは、非線形評価の段階で失敗することがわかっている。したがって、広い世界で議論することは諦めて、具体的な初期データ（ただし、特異性は強いもの）に対して解を構成しようと試みた。特異性の強い超関数として代表的なものはとりあえず「δ関数」であるから、本研究では初期データにδ関数（および台が点在するδ関数の重ね合わせ）を課して解の構成を試みた。本研究において編み出された解の構成方法を先に述べると、以下のとおりである。

① 初期データが 1 つのδ関数から構成されるときには、

$$u(t,x) = A(t)\exp(it\Delta)\delta$$

の形をした解が存在する。ここで、$A(t)$ は時刻変数 t の 1 変数関数で、$\exp(it\Delta)$ は線形シュレディンガー方程式の解作用素である。この表現をもとの非線形シュレディンガー方程式に代入すると、$A(t)$ の常微分方程式に帰着できる。この常微分方程式は、非線形項のベキが $1 < p < (n+2)/n$ の範囲にあれば陽的に解くことができる。したがって、解の存在が示されたことになる。ちなみにこの修正振幅 $A(t)$ は非線形効果によって生ずるものである。

② 初期データが 2 つのδ関数の重ね合わせになっているとき、つまり、

$$u(0,x) = \mu_0\,\delta_0 + \mu_1\delta_a$$

（ただし、δ_b は $x = b \in \mathbb{R}^n$ に台をもつδ関数で、μ_0 と μ_1 は複素数とする）で与えられているとき、

$$u(t,x) = \sum_{j\in Z} A_j(t)\exp(it\Delta)\,\delta_{ja} \quad \cdots\cdots(*)$$

のような表現をもとの非線形シュレディンガー方程式に代入すると、重ね合わせ係

数 $A_j(t)$ の常微分方程式系を解く問題に帰着できる。この常微分方程式系は、非線形項のベキが $1 < p < (n+2)/n$ の範囲にあれば解くことができる（ただし、δ関数が一つの場合とは違って、陽的に解けない）。したがって、とりあえず解の存在が示されたことになる。δ関数を用いた表現を初期データに課す利点は、非線形項の書き換えがうまくいくところにある。実際、上記(*)のような表現を非線形項 $N(u) = |u|^{p-1} u$ に代入すると、

$$N(u(t,x)) = (4\pi it)^{-n(p-1)/2} \sum_{j \in Z} \tilde{A}_j(t) \exp(it\Delta) \delta_{ja}$$

のように再び $\exp(it\Delta)\delta_{ja}$ の線形結合で表現できることを示せた。この等式を導く際に使った主要な道具はフーリエ級数展開である。

③ 初期データが 3 つの δ 関数の重ね合わせになっているとき、つまり、

$$u(0,x) = \mu_{00}\delta_0 + \mu_{10}\delta_a + \mu_{01}\delta_b$$

（ただし、$a, b \in \mathbb{R}^n$ は一次独立もしくは有理数体上一次独立とし、μ_{00}、μ_{10}、μ_{01} は複素数とする）で与えられているとき、

$$u(t,x) = \sum_{j,k \in Z} A_{jk}(t) \exp(it\Delta) \delta_{ja+kb}$$

のような表現をもとの非線形シュレディンガー方程式に代入すると、重ね合わせ係数 $A_{jk}(t)$ の常微分方程式系を解く問題に帰着できる。この常微分方程式系は、非線形項のベキが $1 < p < (n+2)/n$ の範囲にあれば解くことができる。したがって、解の存在が示されたことになる。

4．研究成果

項目 3. に記述した研究方法によって得られた成果は以下のとおり。まず、初期データが一つの δ 関数からなる場合に次の定理を得た。

（定理１） $u(0,t) = \mu\delta$ のとき，非線形シュレディンガー方程式の解で、

$$u(t,x) = A(t)\exp(it\Delta)\delta$$

のような表現を持つものが存在する。ここで、修正振幅 $A(t)$ は次の常微分方程式を満たす。

$$iA'(t) = (4\pi it)^{-n(p-1)/2} \lambda |A(t)|^{p-1} A(t)$$

さらに非線形項に含まれる係数 $\lambda \in \mathbb{C}$ について、$\mathrm{Im}\lambda \geqq 0$ のときにはこの常微分方程式の解は正の有限時刻 t において発散し、$\mathrm{Im}\lambda \leqq 0$ のときにはこの常微分方程式の解は正の時刻 t について大域的に存在する。

これらの事柄は、上記の常微分方程式が陽的に解けることから用意に理解できるであろう。次に、初期データが二つの δ 関数の重ね合わせで書かれているときには、次の定理が成り立つ。

（定理 2） $u(0,t) = \mu_0\delta_0 + \mu_1\delta_a$ のとき，非線形シュレディンガー方程式の解で、

$$u(t,x) = \sum_{j \in Z} A_j(t) \exp(it\Delta) \delta_{ja}$$

のような表現を持つものが存在する。ここで、重ね合わせ係数 $\{A_j(t)\}$ は、1 次の重み付き数列空間 $\ell^2(Z)$ に値をとる微分可能な関数である。

さらに非線形項に含まれる係数 $\lambda \in \mathbb{C}$ について、$\mathrm{Im}\lambda \geqq 0$ のときに $\{A_j(t)\}$ は正の有限時刻 t において発散し、$\mathrm{Im}\lambda \leqq 0$ のときに $\{A_j(t)\}$ は正の時刻 t について大域的に存在する。

定理 2 において、初期データは 2 つの δ 関数から構成されている（モードが 2 つである）にもかかわらず、時刻が少しでも経過するととたんに無限個の δ 関数に由来するものが生成されている（無限個のモードが生成されている）ことに注意。このようなモードの生成効果は非線形現象ならではのものである。最後に、初期データが三つの δ 関数の重ね合わせで書かれている場合に関する結果を述べる。初期データである超関数の台の配置によって、時間大域的な解の存在証明の難易度が様変わりする。

（定理 3） $a,b\in\mathbb{R}^n$ は一次独立もしくは、平行であるとしても有理数体上一次独立であるとする。このとき、初期データ

$$u(0,t)=\mu_{00}\delta_0+\mu_{10}\delta_a+\mu_{01}\delta_b$$

に対し，非線形シュレディンガー方程式の解で、

$$u(t,x)=\sum_{j,k\in Z}A_{jk}(t)\exp(it\Delta)\delta_{ja+kb}$$

のような表現を持つものが存在する。ここで、重ね合わせ係数 $\{A_{jk}(t)\}$ は、1＋ε 次の重み付き数列空間 $\ell^2(Z^2)$ に値をとる微分可能な関数である。

さらに非線形項に含まれる係数 $\lambda\in\mathbb{C}$ について、$\mathrm{Im}\lambda\geqq 0$ のときに $\{A_{jk}(t)\}$ は正の有限時刻 t において発散する。$a,b\in\mathbb{R}^n$ が一次独立なとき、$\mathrm{Im}\lambda\leqq 0$ ならば $\{A_{jk}(t)\}$ は正の時刻 t について大域的に存在する。また、$a,b\in\mathbb{R}^n$ が平行で有理数体上一次独立なとき、条件 $\mathrm{Im}\lambda\leqq 0$ に加えて $(p-1)|\mathrm{Re}\lambda|\leqq 2\sqrt{p}\,|\mathrm{Im}\lambda|$ が成り立つならば $\{A_{jk}(t)\}$ は正の時刻 t について大域的に存在する。

定理 3 において、初期データである超関数の台が同一直線上に並ぶとき、非線形項に含まれる係数に付加的な条件が付いている。非常に気になるところであるが、この余計とも思われる条件を外して時間大域解の存在を示せるのかどうかが今後の新たな課題となるであろう。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① N.Kita,Nonlinear Schrödinger equation with δ-functions in initial data. Sugaku repository in AMS. 査読無，To appear.

② 北直泰、δ 関数を初期データにもつ非線形 Schrödinger 方程式について、数学、査読有、第 62 巻第 3 号、2010、329－345

③ N.Kita, A.Shimomura, Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 61, 2009, 39－64

〔学会発表〕（計 4 件）

① N. Kita, Blowing-up solution to the nonlinear Schrödinger equation with complex coefficient, Nonlinear Dispersive Equations and Fluid Machanics, December 12th , 2012

② 中村能久、北直泰、行列型非線形シュレディンガー方程式の解の漸近挙動について、日本数学会 2012 年 9 月 20 日

③ 北直泰、下村明洋、劣臨界指数の非線形消散項を伴うシュレディンガー方程式の解の漸近挙動、日本数学会 2008 年 9 月 27 日

④ N.Kita, Blowing-up solution to the nonlinear Schrödinger equation with complex coefficient, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, May 20th, 2008

６．研究組織
(1)研究代表者

北　直泰（KITA NAOYASU）
宮崎大学・教育文化学部・准教授
研究者番号：70336056