様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年 4 月 1 日現在

機関番号：22604
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間： 平成２０年度 ～ 平成２２年度
課題番号：20540182
研究課題名（和文） 周期的な点相互作用に従う１次元ディラック作用素のスペクトルについて
研究課題名（英文） Spectral Gaps of the Dirac Operators with Periodic Point Interactions

研究代表者
吉冨 和志（YOSHITOMI KAZUSHI）
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40304729

研究成果の概要（和文）：周期的な点相互作用に従う１次元ディラック作用素のスペクトルについて考察を行った。スペクトラルギャップの幅の漸近的性質と、作用素に含まれるパラメータの数論的性質を関連づける結果を得た。

研究成果の概要（英文）：In this research the one-dimensional Dirac operator with a periodic point interaction has been investigated. The main result gives a relationship between the asymptotic behavior of the length of the gaps and the Diophantine property of the parameters involved in the operator.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
平成 20 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
平成 21 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
平成 22 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総 計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野： 数物系科学
科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学
キーワード： 関数方程式

１．研究開始当初の背景

周期的な点相互作用に従う量子力学的ハミルトニアンは，１９１８年に R. Kronig と G. Penney により初めて導入された．彼らは結晶内の電子のハミルトニアンとして，ポテンシャルがデルタ関数で与えられる次のシュレディンガー作用素を解析した：

$$L_0=-d^2/dx^2+\Sigma_{k\in Z}\beta\,\delta(x-2\pi k),\quad \beta\in R-\{0\}$$

この作用素は今日では Kronig-Penney Hamiltonian と呼ばれ，殆どの固体物理学のテキストで引用されている．彼らによる打要素の定義は数学的に厳密なものでは無かったが，その後 J. von Neumann や M. G. Krein による対称作用素の自己共役拡張の理論を用いた数学的に厳密な定式化が成され，また多岐にわたり拡張された．１９８６年に F. Gesztesy, H. Holden, W. Kirsch は次のような作用素を導入した：

$$L_1=-d^2/dx^2+\Sigma_{k\in Z}\beta\,\delta'(x-2\pi k),$$

$\beta \in \mathrm{R}-\{0\}$

彼らは L_1 の k 番目のスペクトラルギャップの幅が $k\to\infty$ とするときに正の無限大に発散することを示した．これらの作用素は基本領域あたり１個の点相互作用を含む．これに対し，私は基本領域あたり２個の点相互作用を含む次のような作用素について考察した：

$$L_2=-d^2/dx^2+\sum_{k\in Z}(\beta_1\delta'(x-\kappa-2\pi k)+\beta_2\delta'(x-2\pi k)) \text{ in } L^2(\mathrm{R})$$

L_2 のスペクトラルギャップの幅の漸近的性質と，パラメータ κ の数論的性質の関係を得た(K. Yoshitomi: Spectral gaps of the Schrodinger operators with periodic δ'-interactions and Diophantine approximations, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 143 (2007), 185-199）．本研究で扱う作用素は L_2 に相対論的効果を加えたものであ．。

２．研究の目的

周期的な点相互作用に従う１次元ディラック作用素のスペクトラルギャップについて考察する．$\kappa\in(0,\ 2\pi)$ とし，

$$Z_1=\{\kappa\}+2\pi\mathbf{Z},\ Z_2=2\pi\mathbf{Z},\ Z=Z_1\cup Z_2$$

とおく．σ_1, σ_3 をパウリ行列とする．β_1, $\beta_2\in\mathrm{R}-\{0\}$, $m\geqq 0$ に対し，$(L^2(\mathrm{R}))^2$ 上のディラック作用素 H を次で定義する．

$$(Hf)(x)=-i\sigma_1(df/dx)(x)+m\sigma_3 f(x),\quad x\in\mathbf{R}-\Gamma$$

$$\mathrm{Dom}(H)=\{(f_1,f_2)^T;\quad f_1\in H^1(\mathbf{R}),\ f_2\in H^1(\mathbf{R}-\Gamma),\ f_2(x+)-f_2(x-)=-i\beta_k f_1(x) \text{ on } Z_k \text{ for } k=1,2\}$$

（ただし、$(\cdot,\cdot)^T$ は縦ベクトルを表す.）作用素 H は自己共役であり，H のスペクトル $\sigma(H)$ は上にも下にも非有界である．また，相互作用の周期性により，$\sigma(H)$ は互いに内点を共有しない可算無限個の有界閉区間（バンド）の和集合で表される．隣接するバンドの間の開区間をギャップという．各ギャップは自然に添数付けられる．$k\in\mathbf{Z}$ に対し，$\sigma(H)$ の第 k ギャップを G_k とおき，その長さを $|G_k|$ で表す．本研究の目的は，$k\to\infty$ または $k\to-\infty$ とするときの，$|G_k|$ の漸近挙動を解析することである．

３．研究の方法

研究の方法は情報収集と研究成果発表に大別される．以下，これらの詳細について述べる．

(1) 情報収集

当該研究に関連した国内外の単行本および研究集会報告集を多数購入し，情報収集を行った．また，多くの研究集会やセミナーに参加し，情報収集を行った．

(2) 研究成果発表

当該研究で得られた結果を国内外の研究集会で発表し，研究集会参加者と議論を行った．その際に得られた有益な示唆や情報を当該研究に還元させた．

４．研究成果

周期的な点相互作用に従う１次元Dirac作用素のスペクトルについて考察を行った．スペクトラルギャップの幅の漸近的性質と，作用素に含まれるパラメータの数論的性質の関係を得た．Dirac作用素についての従来の研究では，この種の関係は全く得られていないので，当該研究で得られた結果は重要かつ画

期的であるといえる．ここで，得られた結果のうちで典型的なものについて述べる．$\kappa \in (0,2\pi)$とし，βを0でない実数とする．格子$\{0,\kappa\}+2\pi\mathbf{Z}$を$\Gamma$と表す．$L^2(\mathbf{R})^2$上のDirac作用素Hを次で定める：

$$H=-i\sigma_1(d/dx),\ x\in \mathbf{R}-\Gamma$$

$$\mathrm{Dom}(H)=\{(f_1,f_2)^T;\quad f_1\in H^1(\mathbf{R}),$$

$$f_2\in H^1(\mathbf{R}-\Gamma),$$

$$f_2(x+)-f_2(x-)=-i\beta f_1(x) \text{ for } x\in \Gamma\}$$

ただし，σ_1はPauli行列を表す．Hは自己共役作用素であり，そのスペクトルはバンド構造を持つ．Hのスペクトラルギャップを自然に並べたものをG_j（$j\in\mathbf{Z}$）とする．$\tau=2\pi-\kappa$とおく．　$\kappa_0=\tau/\kappa$は無理数であると仮定する．

$$\theta=((1-\kappa_0)/\pi)\tan^{-1}(2/\beta),$$

$$W=2\pi^2(4+\beta^2)^{1/2}|\beta|/(4\pi^2+\beta^2\kappa\tau)$$

とおく．また，$x\in\mathbf{R}$に対し，　$\|x\|=\min\{|x-n|;\ n\in\mathbf{Z}\}$とし，

$$M_{\pm}(\kappa_0,\theta)=\liminf_{q\to\infty}\|\pm q\kappa_0+\theta\|$$

（複号同順, qは整数）

とおく．$M_{\pm}(\kappa_0,\theta)$を非斉次近似定数とよぶ．得られた結果は次のように述べられる．

定理　$\liminf_{j\to\infty} j|G_{\pm j}|=W\,M_{\pm}(\kappa_0,\theta)$

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

[1]Kazushi Yoshitomi: Dirac operators with periodic point interactions - spectral gaps and inhomogeneous Diophantine approximation, Michigan Mathematical Journal 58 (2009), 363-384.

[2]Kazushi Yoshitomi: Inverse spectral problems for singular rank-one perturbations of a Hill operator, Journal of the Australian Mathematical Society 87 (2009), 421-428.

〔学会発表〕（計９件）

[1] 吉冨和志: Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator. 第49回実函数論函数解析学合同シンポジウム，東京理科大学野田キャンパス，2010年８月

[2]Kazushi Yoshitomi: Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator. The Jozef Marcinkiewicz Centenary Conference, Adam Mickiewicz University, June 2010.

[3] 吉冨和志: Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator. 筑波ワークショップ，筑波大学大学院数理物質科学専攻，2010年３月

[4] 吉冨和志: Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator. 筑波大学解析セミナー，筑波大学大学院数理物質科学専攻，2009年12月

[5] 吉冨和志: Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator. RIMS研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」，京都大学数理解析研究所，2009年12月

[6] Kazushi Yoshitomi: Inverse spectral problems for singular rank-one perturbations of a Hill operator. International Conference on Complex Analysis and Related Topics, University of Turku, Finland, August 2009.

[7] Kazushi Yoshitomi: Inverse spectral problems for singular rank-one perturbations of a Hill operator. Sixth Advanced Course in Operator Theory and Complex Analysis, University of Sevilla, Spain, June 2009.

[8] Kazushi Yoshitomi: Inverse spectral problems for singular rank-one perturbations of a Hill operator. Third School and Workshop on Mathematical Methods in Quantum Mechanics, Universita di Padova, Bressanone, Itary, February 2009.

[9] Kazushi Yoshitomi: Inverse spectral problems for singular rank-one perturbations of a Hill operator. International Conference on Applied Mathematics and Approximation Theory, University of Memphis, USA, October 2008.

６．研究組織

(1)研究代表者

吉冨和志（YOSHITOMI KAZUSHI）
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40304729

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし