

機関番号：22604

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540183

研究課題名(和文)

計算調和解析、近似計算法の新展開

研究課題名(英文) Computational harmonic analysis, new development of approximation

研究代表者

岡田 正巳 (OKADA MASAMI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：00152314

研究成果の概要(和文)：

関数近似に適した様々の基底関数を構成すること、関数のサンプリング近似と、その誤差評価を与えること、データ解析への応用を目的とした。成果として、必ずしも帯域制限のない関数のサンプリング近似に適した新しい非分離スプラインとその一般化の構成に成功し、それら基底関数を用いた関数補間が、関数のベゾフ(準)ノルムによる近似誤差評価を持つことを示した。データ解析については、上記の応用として、一様データの場合に予備的な結果を得た。

研究成果の概要(英文)：

The research topics have been the construction of various new bases including the error estimate of sampling approximation using the bases and its application to data analysis. We found new non-separable splines and their generalizations which enabled us to show that our sampling method gives approximation of not necessarily band-limited functions with good error estimates corresponding to the Besov smoothness of functions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	1,080,000	4,680,000

研究分野：計算調和解析学、応用数理

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実解析

## 1. 研究開始当初の背景

ウェーブレットを典型とする数値調和解析学は解析対象の構成的近似と離散化、その計算機上での表現を研究対象とし、数理学や工学における現代的応用が重要な研究課題である。その基礎となる数学解析での課題として、離散表現の基礎数理である関数近似の研究や、数値解析やデータ解析、さらに画像解析のような情報科学との関わりも重要となっていた。

## 2. 研究の目的

## (1) 研究の学術背景

## ① 外の研究動向と位置づけ：

ウェーブレット基底による重要な関数空間の特徴づけが研究され、信号解析・画像解析・統計解析など、情報科学にも大きな影響を引き起こしてきた。科学計算との関わりとしては偏微分方程式の数値計算への応用も盛んである。そこでは、離散と連続という古くからの問題意識や、実解析学とくに関数近似論や補間空間論、調和解析学と応用諸科学

との交流が大きな発展の契機になっていた。

②着想に至った経緯、これまでの研究成果：

以前から、特に1次元の場合、多重解像度解析による偏微分方程式の研究、関数空間のウェーブレット離散化、エネルギー保存の計算スキーム等の研究の蓄積があった。特に新たな発展の手掛かりとして、サンプリング近似に適した特別なスプライン基底関数を用いれば、サンプリング補間近似により、上からの漸近誤差評価が得られることが判明し、集中して調べることの必要性が生じていた。

(2) 研究期間内に明らかにしたいこと

①近似計算に最適な基底関数の構成と、それを用いた数値シミュレーションの方法の確立

2,3次元では正方格子に付随するものだけでなく、新たな基底関数を構成し、それらの性質を比較する必要がある。また、種々の有用な関数空間での無条件基底になっているのか等、関数の級数展開の安定性も調べ、離散化に役立つのかを突き止め、それから応用として数値シミュレーションの可能性を検証することが重要と判断した。

②実解析の方法による不等式の研究とサンプリング近似誤差評価への応用

まず1次元で調べたサンプリング補間近似を2,3次元に拡張することを計画した。

次に、サンプリング近似誤差評価に、実解析の方法を適用すれば、シャノンによる有名なsinc関数によるサンプリング近似の数学的特徴づけが可能であることがわかり、この着想をさらに進展させ、適用範囲を確定すると共に、多変数の場合に発展させて最良近似誤差評価を研究することを目的とした。

③不規則、不完全測定データからの原像再構成

統計的逆問題は「データ情報についての調和解析」ともいえる。ウェーブレットとその発展版を活用しての画像解析、情報圧縮、情報復元に顕著な進歩がみられたが、欠損データ、不規則データからの原信号・画像の復元という問題は、まだ大きな研究課題として残されていた。本研究では、関数近似理論や調和解析学の方法により、その数理解明、特に、データからの特徴抽出、部分的データからの効率的再構成を研究目的とした。

### 3. 研究の方法

(1) 近似計算に最適な基底関数の構成と、それを用いた数値シミュレーションの方法の確立

1次元ではサンプリング近似に適した滑らかで局在された補間基底関数を構成できているが、多次元では、関数の外挿について任意性があり、まだ決定的なものが得られてい

なかった。一般領域で統一的に導出する新たな方法を探ることが得策と考えた。小澤や上野との共同研究により、数値解析の方法を拡張して適用できることが期待された。さらに正方格子と限らない非一様格子でも、諸性質をすべて満たすような基底関数を構成するべく、平成20年度はまず三角格子で試した。

(2) 実解析の方法による不等式の研究とサンプリング近似誤差評価への応用

実解析では、主としてフーリエ級数の収束問題に関係して種々の積分変換や関数空間が研究されてきたが、それらは近似誤差評価において、境界での数学解析に大きな貢献が期待される。上野にはサンプリング近似とそれを用いた数値シミュレーションの研究を分担してもらった。他方では、等間隔サンプリング近似の誤差評価の理論的検討において、数値解析の専門家の森正武氏から70年代の高橋秀俊氏の仕事との関連について指摘を受け、その複素解析学的方法を検討し、ほぼ同じ評価式が導かれることを確認したことが複素解析と実解析との手法の比較による新たな研究の展開を計画した理由である。これは松尾宇泰氏（東京大学）とその近くの人達が工学的な応用の観点から研究しているテーマとも密接な関連があり、部分的に研究交流を行った。

(3) 不規則、不完全測定データからの原像再構成

測定データから原像を再構成する統計的問題への取組みは確率統計学や信号解析・画像解析と調和解析の交り多い接点と考えられた。画像解析の特徴抽出などに国際的評価の高い海外研究協力者の斎藤直樹（カリフォルニア大学）とは定期的に直接の研究連絡・討議を行った。さらに、統計的逆問題の研究においてはKerkyacharian-Picard（パリ6大）や、Candes（カルテック）とも研究討論をするなど交流を継続した。また、国内で画像復元に詳しい芦野隆一氏（大阪教育大）らとも、折に触れて研究交流できた。

(4) 研究集会の開催

平成21年度：

①国際研究集会を開催

Harmonic Analysis and its Applications at Tokyo 2008, 10-12 Oct. 首都大学東京

②研究集会の開催に協力

平成20年度：数値解析シンポジウム、実解析シンポジウムの旅費を一部負担。

平成22年度：

①国際研究集会を開催

Bulgaria-Japan mathematics/meeting

9月4日 首都大学東京

②国際研究集会を共同開催

HARMONIC ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS AT POHANG 2009 November 26-28, 2009, Pohang

浦項工科大学

(5) 定例セミナー

首都大学東京の理工学研究科数理解析セミナーに、研究分担者だけでなく本申請課題に密接に関係した研究者にも、適宜このセミナーでの研究発表を依頼し、研究討論を行った。

(6) 国際共同研究

Jaffard (パリ、マルヌ・ラ・ヴァレ大)らとの研究協力は特に有意義であり、共同研究できて科学研究費による研究支援は有難かった。

(7) 海外研究協力者の招聘

招聘計画は余儀なく変更された。

4. 研究成果

次のような研究成果があげられた。

(1) 2次元においても、関数の選点近似に適した基底関数をスプライン関数の一次結合で構成することに成功し、さらにそれからKP方程式のような非線形偏微分方程式の数値解を計算することに応用できた。

(2) ベゾフ空間に属する必ずしも帯域制限のない関数についてのサンプリング近似と、その誤差評価について、より完全な結果が得られた。即ち、逆の不等式評価も成立することが証明でき、サンプリング近似誤差の減少度と、関数の滑らかさの度合いとが、きちんと対応していることを示すことができた。

(3) データ解析、即ち、不完全データからの非一樣再構成問題については、部分的な結果が得られたにとどまるが、2進有理数上のサンプル値によって、関数のベゾフの意味での滑らかさを特徴づけることが可能になった。連続的なものを離散的にとらえるという点で意義があると考えられる。

(4) 異なる媒体の接触面において、ラプラシアン of the difference approximation formula as a 2nd order accuracy method to construct it, and numerical simulation can also be used to confirm it.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Stephane Jaffard, Masami Okada and Toshihide Ueno, Approximate sampling theorem and order of smoothness of the Besov space. RIMS Kokyuroku, Bessatsu B18 (2010), 45-56. 査読有
- ② Yingying Wu, Simon Truscott and Masami Okada, A finite difference scheme for sn interface problem. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有、27巻、2010、239-262
- ③ Masami okada, Toshihide Ueno, Some remarks on approximate sampling

theorems: estimate with Besov norm and an application, RIMS 共同研究確率数値解析に於ける諸問題Ⅷ、査読無、1620巻、2009、147-149

- ④ Toshihide Ueno, Masami Okada, Non-separable splines and numerical computation of evolution equations by the Galerkin methods. Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有、223巻、2009、159-176

[学会発表] (計4件)

- ① 岡田, スプライン関数、ベゾフ空間そしてサブリング補間近似 2010年度日本数学会秋季総合分科会企画特別講演 2010年9月24日 名古屋大学
- ② 岡田, Approximate sampling theorem for Besov spaces and its application RIMS 研究集会 2009年7月6日 京都大学
- ③ 岡田, 接合境界面での2次精度差分公式の導出 数値解析シンポジウム (NAS2008) 2008年6月14日 秋田県たざわこ芸術村
- ④ 岡田, Interpolative sampling functions and error estimates 第8回確率数値解析に於ける諸問題 2008年7月7日 京都大学

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

研究室のホームページを作成して研究状況、  
成果などもリンクして公開した。

<http://www.comp.tmu.ac.jp/okmas/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡田 正已 (OKADA MASAMI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：00152314

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者

倉田 和浩 (KURATA KAZUHIRO)

首都大学東京・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10186489

吉富 和志 (YOSHITOMI KAZUSHI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教  
授

研究者番号：40304729

下村 明洋 (SHIMOMURA AKIHIRO)

首都大学東京・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号：00365066

小澤 一文 (OZAWA KAZUFUMI)

秋田県立大学・システム科学技術学部・教授  
研究者番号：20100753

上野 敏秀 (UENO TOSHIHIDE)

自治医科大学・医学部・助教  
研究者番号：40381446