

自己評価報告書

平成 23 年 5 月 10 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008年度～2012年度

課題番号：20540190

研究課題名(和文) 発展方程式とそのレゾルベント問題

研究課題名(英文) Evolution equations and their resolvent problems

研究代表者

岡沢 登 (Okazawa Noboru)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：80120179

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数解析

1. 研究計画の概要

この3年間、計画調書に述べた3つの課題

- (A) 複素 Ginzburg-Landau 方程式；
 (B) 2階線形放物型方程式の1階微分の係数関数が非有界なもの；
 (C) (抽象的) 非正規形双曲型発展方程式に加えて、これら総論の各論として
 (D) Dirac 方程式および Schrodinger 発展方程式；
 (E) Schrodinger 作用素 $-\Delta + t|x|^2$ の4階版 $(-\Delta)^2 + t|x|^4$ (t は実パラメータ)；
 (F) L^p ($p \neq 2$) での Schrodinger 作用素の holomorphic family $\{-\Delta + \kappa V(x)\}$ (κ は複素パラメータ)

の3つの研究も並列的に進める計画を立てた。各論の3つは博士後期課程の院生3人それぞれとの共同研究である。(D), (E) を課題とした2人の院生は今年2011年3月に学位を取得している。

2. 研究の進捗状況

(A) の初期値(境界値)問題の強適切性の L^2 理論についてはかなり満足のいく結果が刊行できたと思う([雑誌論文][4])。細かなところを Ginibre-Velo(1996, 97) による先行結果と比べると少しだけ改良の余地があるといわざるを得ないが、劣微分作用素の理論を取り入れた証明法はこちらのものの方が優れていると思う。証明法についての最新の考察については後述する。

(B) については、各論に気を取られているうちに一般論では、よくできる博士課程の院生に先を越されてしまった。[学会発表][6]の準備中に、独立させて発表すべき結果に到達

されてしまったというわけである。これは Eberle (1999) の結果の一般化であると共にその証明の簡素化を与えているので周辺への影響を見定めていきたいと思っている。元の問題は、普通の Schrodinger 作用素のとき、即ち、1階微分がないときに故加藤敏夫教授が1986年に未解決問題として挙げられ、その後、Ouhabaz (1995) によって肯定的に解決された問題の一般化である。昨年9月に Bologna で初めて会った G. Metafuno 教授からはこれについて話をした翌日に改良を示唆され、また関連する例についても連絡をもらった。今は、意外にもかなり奥が深い問題と感じている。

(C) そのものにまだ進展はないのであるが、そこへ向かう前にやるべき抽象論の構成とその応用例として (D) に述べた Dirac 方程式を見出したことは、院生の一人(K. Yoshii) に学位を取らせた以上の意味があったと思う。同じ院生とは Coulomb ポテンシャルの中心が時間と共に動く場合の Schrodinger 発展方程式の初期値問題をエネルギー法で扱った論文も完成させた([雑誌論文][3, 6], [学会発表][1, 4])。この二つを含む三編の論文がその院生の学位論文になった。なお[雑誌論文]の[1], [2] は本研究開始前に投稿していたものである。

(D) については(C)の中で述べた通りである。(E) はこれまで全く知られていない種類の結果であり、[雑誌論文]の[5]として発表した。実パラメータ t を複素パラメータにした結果は、別の院生(H. Tamura)の単著論文になり、両方合わせてその院生の学位論文になったが、更なる一般化は計算量の急激な増加のせいでかなり難しそうである。

(F) については次項で述べることにする。

3. 現在までの達成度

(A) を有界領域で考えるときにはコンパクト性の方法が使えるが、 \mathbb{R}^N など非有界領域ではそれが使えなかった。ところが方程式の線形部分である $-\Delta$ を調和振動子の Hamiltonian $-\Delta + \mu|x|^2$ で置き換えるとコンパクト性の方法を復活させることができる。ここで μ は後から 0 に収束させるパラメータである。この結果の中間報告は京大数理解析研究所の講究録に掲載予定である。更なる改良も準備中である。

(A) の方程式の複素パラメータを適当に選ぶと形式的に非線形 Schrodinger 方程式 (NLS) が得られる。ここで今度は $-\Delta$ を $-\Delta + a|x|^{-2}$ で置き換えると未解決の問題になる ($a > -(N-2)^2/4$)。ここで定数 $(N-2)^2/4$ は Hardy の不等式に現れるものである。この問題をいわゆる Kato's method で扱った論文は、この 4 月末に完成した。この論文は、昨年参加した Bologna での国際会議の報告集に投稿中である。従って、(A) については初期値を L^p から取る、強適切性の L^p 理論以外はかなり順調に進んでいるように感じられる。

(B), (C) については前項で述べたようにその各論的な課題についての研究で成果があった。

(F) の成果とは、 L^2 での加藤敏夫先生の結果を L^p に一般化したものであり、現在投稿中である。

4. 今後の研究の推進方策

平成 23 年度の交付申請書と重複する部分もあるがもう一度まとめておこう。

(A) では [学会発表] [5] の改良版の完成を急ぐ。また Kato's method とは別の方法で (NLS) の適切性を示していく予定である。そのことで $|x|^{-2}$ の係数に対する条件を緩和したい。

(B) では [学会発表] [6] の結果をまとめることが当面の課題であるが、線形の問題は簡単、非線形の問題の方が難しいという先入観は捨てて取りかかる必要があるようである。

(C) Coulomb ポテンシャルの中心が時間と共に動く場合の Schrodinger 発展方程式の初期値問題に適用できる抽象論の建設は、非正規形の一般論を展開する前にぜひともやっておきたいと思っている。なぜなら、うまい近似を採用すれば、近似方程式には Okazawa(1998)の抽象論が適用可能だからである。従って、大げさにいえばこれは双曲型発展方程式論の存在意義にも影響する課題ということになると思う。現実の問題では一般に Coulomb ポテンシャルは複数個あるわけだから、そのモデルケースくらいは扱えることが望ましいわけである。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

[1] N. Okazawa, T. Yokota, Quasi-m-accretivity Schrodinger operators with singular first-order coefficients, *Discrete Continuous Dynamical Systems* **22**, 1081–1090 (2008) 査読有。

[2] N. Okazawa, L^{∞} -estimates for Sobolev functions in terms of ∇ and Δ , *Mathematische Zeitschrift* **262**, 475–515 (2009) 査読有。

[3] N. Okazawa, T. Yokota, K. Yoshii, Remarks on linear Schrodinger evolution equations with Coulomb potential with moving center, *SUT J. Math.* **46**, 155–176 (2010) 査読有。

[4] N. Okazawa, T. Yokota, Subdifferential operator approach to strong wellposedness of the complex Ginzburg-Landau equation, *Discrete Continuous Dynamical Systems Series A* **28**, 311–341 (2010) 査読有。

[5] N. Okazawa, H. Tamura, T. Yokota, Square Laplacian perturbed by inverse fourth-power potential. I Self-adjointness (real case), *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **141 A**, 409–416 (2011) 査読有。

[6] N. Okazawa, K. Yoshii, Linear evolution equations with strongly measurable families and application to the Dirac equation, *Discrete Continuous Dynamical Systems, Series S* **4**, 723–744 (2011) 査読有。

[学会発表] (計 6 件)

[1] N. Okazawa, K. Yoshii, Linear evolution equations of hyperbolic type with application to Schrodinger equations, *Direct, Inverse and Control Problems for Partial Differential Equations*, Cortona (Italy), 2008 年 9 月 24 日。

[2] N. Okazawa, Linear evolution equations of hyperbolic type in Hilbert space with applications to symmetric hyperbolic systems, *International Workshop on Differential and Difference Equations*, Halong (Vietnam), 2009 年 10 月 30 日。

[3] N. Okazawa, M. Sobajima, T. Yokota, Analytic semigroups generated by 2nd order elliptic operators with singular coefficients, *Conference on Semigroups, Evolution Equations, Boundary Conditions*, Tubingen (Germany), 2010 年 7 月 1 日。

[4] N. Okazawa, T. Yokota, K. Yoshii, Linear Schrodinger evolution equations with Coulomb potential with moving center, *PDE's Semigroup Theory and Inverse Problems*, Bologna (Italy), 2010 年 9 月 4 日。

[5] Ph. Clement, N. Okazawa, H. Tamura, T. Yokota, Cauchy problem for the complex Ginzburg-Landau equation with harmonic oscillator, Nonlinear Evolution Equations and Related Topics to Mathematical Analysis of a phenomena, 京大数理解析研究所, 2010 年 10 月 14 日.

次の講演は, 東日本大震災で中止になった日本数学会の年会で予定していたものであるが, Metafune 教授の名前を留める意味で書き残しておきたい.

[6] M. Sobajima, G. Metafune, N. Okazawa, T. Yokota, Maximal domain of analyticity for the C_0 -semigroups generated by elliptic operators in L^p , 早稲田大学, 2011 年 3 月 21 日.

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

〔その他〕