

## 自己評価報告書

平成 23 年 4 月 4 日現在

機関番号： 32702  
 研究種目： 基盤研究 (C)  
 研究期間： 2008~2011  
 課題番号： 20540192  
 研究課題名 (和文) 非可換力学系の関数解析的基礎研究および位相力学系と作用素論との交流理論の研究  
 研究課題名 (英文) Research in the noncommutative dynamical systems through the method of functional analysis together with the research in the interplay between topological dynamical systems and operator theory  
 研究代表者 長 宗雄 (CHO MUNE0)  
 神奈川大学・工学部・教授  
 研究者番号 10091620

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 量子力学、力学系、ヒルベルト空間、線形作用素、スペクトル

## 1. 研究計画の概要

実数上の区間  $I$  で定義された連続関数の無限次元ヒルベルト空間上の線形作用素についての作用素解析で定義される作用素単調関数、また作用素 *convex, concave* 関数のクラスは、ヒルベルト空間上の作用素論そのものの重要性のほかに量子力学をはじめとして、情報理論、電気回路の理論等々広い範囲の応用があり多数の研究がある。一方、行列環上で定義される対応する関数類は前記のクラスと同時期 (1934-36) に導入され、前記のクラスを構成する基本要素としてこれ等についても多くの研究がなされているが前者に比べてこれ等の関連論文では基本的な事柄が証明なしに成立が主張されていた。まだ *n*-convexity についての判定条件など、完全には基本の事柄が証明されてはいない。本研究では、これらの解決を目指すことを含め、更に (単調減少の列をつくる) これ等の関数類の構造およびこれ等のクラスの作用素単調、convex, concave 関数類への”積み重ね”の構造を明らかにしていくことを目的とする。その重要な一つとしては、良く知られている作用素関数類の特性 (例えば同値関係の基本定理) がどの段階で生じるものか、または途中の *n* の段階では生じない性質なのかを明らかにするという問題がある。これらのことは 前世紀までに既に解明されている、*n* 階連続微分可能な関数類の構造およびそれらの無限回可微分関数類への積み重ねという全ての数学の基礎の主題のヒルベルト空間上の作用素への格上げされた問題と考えられる。そして考える土台は上記よりも更に広く、一般の  $C^*$ -環上の対応する関数類

の研究を進める。

## 2. 研究の進捗状況

行列環上で定義される対応する関数類についての基本事項についてはほぼ証明を与えることができた。Semi-hyponormal 作用素が convexoid であるかどうかは、これまで約 20 年間解決できずにいた。この問題について、Linear and Multilinear Algebra から発表した論文「A remark on numerical range of semi-hyponormal operators」において unilateral shift  $U$  から  $T = aU + bU^*$  とし  $S = T^2$  として作る作用素はすべて convexoid であることを示した。この結果はこの問題の一つの決定的な結果であり、90% は達成できた。次に、バナッハ空間上の作用素について、Polaroid 作用素を研究し、この作用素が single value extension property をもつなら、Weyl の定理が成立することを示した。また、quasi-similar な作用素については、Bishop property をもつ作用素であれば Polaroid 性が同値であることを示した。これらの結果は、Journal of Mathematical Analysis and Applications から「Polaroid type operators under quasi-affinities」として発表し、作用素論の指導的数学者である Raul Curto 氏から高い評価をいただいた。ヒルベルト空間上の作用素の特性関数の研究においては *p*-hyponormal 作用素に特性関数を導入し、スペクトルの特長付けを行った。さらに determinant の積分表示を得ることができた。この結果は Math. Proc. Royal Irish Academy から「Determinants of characteristic functions of *p*-hyponormal

operators」 として発表した。

科研費で掲げたテーマについて 80%程度は達成することができた。

### 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

位相力学系に対応する作用素環としては通常は  $C^*$ -クロス積が考えられているがその前にもっと密接に関係する Banach  $*$ -algebra クロス積がある。これらは  $X$  が 1 点のときはそれぞれ  $l^1(Z)$ ,  $C(T)$  ( $Z$  は整数群、 $T$  はトーラス) となり両者の大きな違いは前者には自己共役ではない閉イデアルが存在することがある。交流理論としてはこの非可換  $l^1$ - algebra の構造が大きな研究課題になるべきであるがこれまでこのクロス積の研究は殆どなかった。主要結果の一つは上の差異を踏まえた次の結果である。

定理:  $l^1$  の閉イデアルが全て自己共役になるのは力学系が free (周期点がない) の時のみに限る。次に、上の二つの algebra のなかで  $C(X)$  と可換な元の全体 ( $C(X)$  の commutant) を考えるとこれ等とともに極大可換な Banach  $*$ -algebra になりそれぞれの non-zero 閉イデアルとは non-zero な共通部分を持つ。この重要な性質は  $C^*$  については証明されているが、character の空間の詳細な解析を行い、合わせて上記の二つの maximal abelian subalgebra へのバナッハ空間としての射影が存在するための必要十分な力学系の条件をもとめた。

### 4. 今後の研究の推進方策

本研究の最後の年である平成 23 年度はアイオワ大学教授の Raul Curto 氏および中国・東北大学の李春吉教授に来日いただく予定である。そして、作用素の  $m$ -convexity に関連して  $m$ -isometric 作用素の研究を、Raul Curto 教授および李春吉教授などと進めたいと計画している。

### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件) これまで発表した論文 14 件はすべて査読有りで、代表的な論文は下記 5 件である。

① P.Aiena, 長 宗雄, M. Gonzalez, Polaroid type operators under quasiaffinities, J. Math. Anal. Appl. **371**,485-495. (2010)

② 長 宗雄, S.V. Djordjevic, B.P. Duggal,

山崎文明、 On an elementary operator with  $w$ -hyponormal operator entries, LAA **433**, 2070-2079, (2010)

③ 長 宗雄, 古谷 正, A remark on numerical range of semi-hyponormal operators, LMLA, **58**, 711-714, (2010)

④ 長 宗雄, 古谷 正, Determinants of characteristic functions of  $p$ -hyponormal operators, Proc. Royal Irish Acad. A **109**, 137-146, (2009)

⑤ 長 宗雄, 古谷 正, 棚橋浩太郎, Xia spectrum for some class of operators, Integr. Equat. Oper. Th. **61**, 159-165, (2008)

[学会発表] (計 4 件)

① 長 宗雄: 「ある作用素方程式について II」仙台作用素環研究集会、2011 年 1 月 17 日、東北大学

② 長 宗雄: 「ある作用素方程式について」仙台作用素環研究集会、2010 年 11 月 30 日、東北大学

③ 長 宗雄: 「semi-hyponormal 作用素は convexoid か?」研究集会「作用素論における非可換解析学の展望」、2009 年 10 月 28 日、京都大学数理解析研究所

④ 長 宗雄 古谷 正: 「 $p$ -hyponormal 作用素の構造定理について」研究集会「作用素論への幾何学の応用」、2008 年 10 月 31 日、京都大学数理解析研究所

[その他]

① unilateral shift  $U$  から  $T = aU + bU^*$  とし  $S = T^2$  として作る作用素はすべて convexoid である(長 宗雄, 古谷 正)

② single value extension property をもつなら、Weyl の定理が成立する (P.Aiena, 長 宗雄, M. Gonzalez)

③ quasi-similar な作用素については、Bishop property をもつ作用素であれば Polaroid 性が同値である (P.Aiena, 長 宗雄, M. Gonzalez)

④  $p$ -hyponormal 作用素に特性関数を導入し、スペクトルの特長付けた(長 宗雄, 古谷 正)

⑤  $p$ -hyponormal 作用素の determinant の積分表示(長 宗雄, 古谷 正)