

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：32702

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540192

研究課題名（和文）非可換力学系の関数解析的基礎研究および位相力学系と作用素論との  
流理論の研究研究課題名（英文） Research in the noncommutative dynamical systems through the method  
of functional analysis together with the research in the interplay  
between topological dynamical systems and operator theory研究代表者 長 宗雄 (CHO MUNEO)  
神奈川大学・工学部・教授

研究者番号：10091620

研究成果の概要（和文）：位相力学系に対応する作用素環としては通常は  $C^*$ -クロス積が考えられているがその前にもっと密接に関係する Banach  $*$ -algebra クロス積がある。これらは  $X$  が 1 点のときはそれぞれ  $L^1(Z)$ ,  $C(T)$  ( $Z$  は整数群,  $T$  はトーラス) となり両者の大きな違いは前者には自己共役ではない閉イデアルが存在することがある。交流理論としてはこの非可換  $L^1$ -algebra の構造が大きな研究課題になるべきであるがこれまでこのクロス積の研究は殆どなかった。主要結果の一つは上の差異を踏まえた次の結果である。

定理：  $L^1$  の閉イデアルが全て自己共役になるのは力学系が free (周期点がない) の時のみに限る。次に、上の二つの algebra のなかで  $C(X)$  と可換な元の全体 ( $C(X)$  の commutant) を考えるとこれ等とともに極大可換な Banach  $*$ -algebra になりそれぞれの non-zero 閉イデアルとは non-zero な共通部分を持つ。この重要な性質は  $C^*$  については証明されているが、character の空間の詳細な解析を行い、合わせて上記の二つの maximal abelian subalgebra へのバナッハ空間としての射影が存在するための必要十分な力学系の条件をもとめた。

Semi-hyponormal 作用素が convexoid であるかどうかは、これまで約 20 年間解決できずにいた。この問題について、Linear and Multilinear Algebra から発表した論文「A remark on numerical range of semi-hyponormal operators」において unilateral shift  $U$  から  $T = aU + bU^*$  とし  $S = T^2$  として作る作用素はすべて convexoid であることを示した。この結果はこの問題の一つの決定的な結果であり、ほぼ達成できた。次に、バナッハ空間上の作用素について、Polaroid 作用素を研究し、この作用素が single value extension property をもつなら、Weyl の定理が成立することを示した。また、quasi-similar な作用素については、Bishop property をもつ作用素であれば Polaroid 性が同値であることを示した。これらの結果は、Journal of Mathematical Analysis and Applications から「Polaroid type operators under quasi-affinities」として発表し、作用素論の指導的数学者である Raul Curto 氏から高い評価をいただいた。ヒルベルト空間上の作用素の特性関数の研究においては  $p$ -hyponormal 作用素に特性関数を導入し、スペクトルの特長付けを行った。さらに determinant の積分表示を得ることができた。この結果は Math. Proc. Royal Irish Academy から「Determinants of characteristic functions of  $p$ -hyponormal operators」として発表した。

研究成果の概要（英文）： Operator algebras corresponding to topological dynamical systems have been studied as  $C^*$ -closed products. On the other hand, there are Banach  $*$ -algebra closed products. These differences are the existence of non-self adjoint closed ideal. One of the main results is the following: Every closed ideal of  $L^1$  is self adjoint if and only if its dynamical system is free. Commutants of algebras are commutative maximal Banach  $*$ -algebras and the intersection of closed ideals is non empty. We proved it for Banach  $*$ -algebras and showed the existence projections to the maximal abelian subalgebras. As a more closing Are semi-hyponormal operators convexoid? This is a open problem for 20 years. About this problem, we could show that if, for the unilateral shift  $U$ , put  $S = T^2$ , then  $S$  is convexoid. It is published from the journal Linear and Multilinear Algebra with title "A remark on numerical range of semi-hyponormal operators". Next we studied Polaroid operators on a Banach space. We showed that if Polaroid operators have single value extension property, then Weyl's Theorem holds for these operators. Also we showed

that if an operator  $T$  is quasi-similar with Bishop property and Polaroid, then  $T$  is Polaroid. These results are published from Journal of Mathematical Analysis and Applications.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：量子力学、力学系、ヒルベルト空間、線形作用素、スペクトル

1. 研究開始当初の背景

実数上の区間  $I$  で定義された連続関数の無限次元ヒルベルト空間上の線形作用素についての作用素解析で定義される作用素単調関数、また作用素 **convex, concave** 関数のクラスは、ヒルベルト空間上の作用素論そのものの重要性のほかに量子力学をはじめとして、情報理論、電気回路の理論等々広い範囲の応用があり多数の研究がある。一方、行列環上で定義される対応する関数類は前記のクラスと同時期 (1934-36) に導入され、前記のクラスを構成する基本要素としてこれ等についても多くの研究がなされているが前者に比べてこれ等の関連論文では基本的な事柄が証明なしに成立が主張されていた。

2. 研究の目的

$n$ -convexity についての判定条件など、完全には基本の事柄が証明されていない。本研究では、これらの解決を目指すことを含め、更に (単調減少の列をつくる) これ等の関数類の構造およびこれ等のクラスの作用素単調、convex, concave 関数類への”積み重ね”の構造を明らかにしていくことを目的とする。

3. 研究の方法

$n$  階連続微分可能な関数類の構造およびそれらの無限回可微分関数類への積み重ねという全ての数学の基礎の主題のヒルベルト空間上の作用素への格上げされた問題と考えられる。そして考える土台は上記よりも更に広く、一般の  $C^*$ -環上の対応する関数類の研究を進める。

4. 研究成果

位相力学系に対応する作用素環としては通常は  $C^*$ -クロス積が考えられているがその前にもっと密接に関係する Banach

$*$ -algebra クロス積がある。これらは  $X$  が 1 点のときはそれぞれ  $l^1(\mathbb{Z})$ ,  $C(T)$  ( $\mathbb{Z}$  は整数群、 $T$  はトーラス) となり両者の大きな違いは前者には自己共役ではない閉イデアルが存在することがある。交流理論としてはこの非可換  $l^1$ - algebra の構造が大きな研究課題になるべきであるがこれまでこのクロス積の研究は殆どなかった。主要結果の一つは上の差異を踏まえた次の結果である。

定理： $l^1$  の閉イデアルが全て自己共役になるのは力学系が **free** (周期点がない) の時のみに限る。次に、上の二つの algebra のなかで  $C(X)$  と可換な元の全体 ( $C(X)$  の commutant) を考えるとこれ等はともに極大可換な Banach  $*$ -algebra になりそれぞれの non-zero 閉イデアルとは non-zero な共通部分を持つ。この重要な性質は  $C^*$  については証明されているが、character の空間の詳細な解析を行い、合わせて上記の二つの maximal abelian subalgebra へのバナッハ空間としての射影が存在するための必要十分な力学系の条件をもとめた。

Semi-hyponormal 作用素が convexoid であるかどうかは、これまで約 20 年間解決できずにいた。この問題について、unilateral shift  $U$  から  $T = aU + bU^*$  とし  $S = T^2$  として作る作用素はすべて convexoid であることを示した。この結果はこの問題の一つの決定的な結果であり、ほぼ達成できた。次に、バナッハ空間上の作用素について、Polaroid 作用素を研究し、この作用素が single value extension property をもつなら、Weyl の定理が成立することを示した。また、quasi-similar な作用素については、Bishop property をもつ作用素であれば Polaroid 性が同値であることを示した。ヒルベルト空

間上の作用素の特性関数の研究においては  $p$ -hyponormal 作用素に特性関数を導入し、スペクトルの特長付けを行った。さらに **determinant** の積分表示を得ることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 20 件)

1. M. Jeu, C. Svensson, J. Tomiyama, On the Banach  $\ast$ -algebra croosed product associated with a topological dynamical sistem, J. Funct. Anal. 査読有 262 巻, 2012, 4746-4765.
2. M. Cho, V. Muller, Spectral commutativity of multioperators, Functional Analysis, Approximation and Computation 査読有 4:1 巻, 2012, 21-25
3. M. Cho, R. Harte, S. Ota, Commutativity to within scalars on Banach space, Functional Analysis, Approximation and Computation 査読有 3:2 巻, 2011, 69-77
4. M. Cho, S.V. Djordjevic, B.P. Duggal, Bishop's property ( $\beta$ ) and an elementary operator, Hokkaido Math. J. 査読有 40 巻, 2011, 337-356
5. M. Cho, T. Nakazi, T. Yamazaki, Hyponormal operator and two-isometry, Far East J. Mathematical Sciences 査読有 49 巻, 2011, 111-119
6. L. Zhang, T. Ohwada, M. Cho,  $\lambda$ -commuting operators, Inter. Math. Forum 査読有 34 巻, 2011, 1685-1690
7. M. Cho, B.P. Duggal, R. Harte, S. Ota, Operator equation  $AB = \lambda BA$ , Inter. Math. Forum, 53 巻, 2010, 2629-2637
8. P. Aiena, M. Cho, M. Gonzalez, Polaroid type operators under quasi-affinities, J. Math. Anal. Appl. 査読有 371 巻, 2010, 485-495.

9. M. Cho, T. Yamazaki, Characterizations of  $p$ -hyponormal and weak hyponormal weighted composition operators, Acta Sci. Math. (Szeged) 査読有 76 巻, 2010, 173-181
10. M. Cho, T. Huruya, A remark on numerical range of semi-hyponormal operators, LMLA, 査読有 58 巻, 2010, 711-714
11. M. Cho, S.V. Djordjevic, B.P. Duggal, T. Yamazaki, On an elementary operator with  $w$ -hyponormal operator entries, LAA 査読有 433 巻, 2010, 2070-2079
12. M. Cho, B.P. Duggal, S.V. Djordjevic, The Browder and Weyl spectra of an operator and its diagonal, Funct. Anal. Approx. Comput. 査読有 1 巻, 2009, 7 - 18.
13. M. Cho, I.B. Jung, W.Y. Lee, On the iterated Duggal transforms, Kyungpook Math. J. 査読有 49 巻, 2009, 647-650
14. M. Cho, T. Huruya, Determinants of characteristic functions of  $p$ -hyponormal operators, Proc. Math. J. Royal Irish Acad. 査読有 109 巻, 2009, 137-146
15. M. Cho, T. Huruya, Trace formula for partial isometry case, Tokyo J. Math. 査読有 2009, 27-32
16. M. Cho, C. Li, Flat extensions of nonsingular moment matrices, Integr. Equat. Oper. Th. 査読有 65 巻, 2009, 243-254
17. M. Cho, J.I. Lee, T. Yamazaki, On operator equation  $AB = zBA$ , Sci. Mat. Japon. 査読有 2009, 49-55
18. M. Cho, T. Huruya, J.I. Lee, On Xia's proposition, Inter. Math. Forum, 査読有 4 巻, 2009, 161-164.
19. M. Cho, M. Giga, A.H. Kim, Spectrum and principal functions of operators,

Operator Theory: Advances and Applications, 査読有 187 巻, 2008, 117-123

20. M. Cho, T. Huruya, K. Tanahashi, Xia spectrum for some class of operators, Integr. Equat. Oper. Th. 査読有 61 巻, 2008, 159-165

〔学会発表〕(計 8 件)

1. 長 宗雄:「On  $m$ -isometric operators III」仙台湾作用素環研究集会、2011 年 1 月 23 日
2. 長 宗雄:「 $m$ -isometric operators」研究集会「スペクトル、数域などの幾何学的特性量を用いた作用素の構造研究」京都大学数理解析研究所、2011 年 11 月 14 日
3. 長 宗雄:「On  $m$ -isometric operators I」仙台湾作用素環研究集会、2011 年 10 月 24 日
4. 長 宗雄:「On  $m$ -isometric operators」ソウル大学、2011 年 6 月 13 日
5. 長 宗雄:「ある作用素方程式について II」仙台湾作用素環研究集会、2011 年 1 月 17 日
6. 長 宗雄:「ある作用素方程式について」仙台湾作用素環研究集会、2010 年 11 月 30 日
7. 長 宗雄:「semi-hyponormal 作用素は convexoid か?」研究集会「作用素論における非可換解析学の展望」京都大学数理解析研究所、2009 年 10 月 28 日
8. 長 宗雄 古谷 正:「 $p$ -hyponormal 作用素の構造定理について」研究集会「作用素論への幾何学の応用」京都大学数理解析研究所、2008 年 10 月 31 日

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

長 宗雄 (CHO MUNEO)  
神奈川大学・工学部・教授  
研究者番号：10091620

### (3) 連携研究者

富山 淳 (TOMIYAMA JUN)  
東京都立大学名誉教授  
研究者番号：