

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540195

研究課題名(和文) 変数型特異積分の研究

研究課題名(英文) Study of singular integrals of variable type

研究代表者

藪田 公三 (YABUTA KOZO)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員

研究者番号：30004435

研究成果の概要(和文)：

曲面 $\{x=\Psi(|y|)\}$ に付随した変数型特異積分について、核函数が奇函数の場合に定数型と同じ結果が成り立つこと及び偶函数の場合に  $p=2$  を含むある範囲で  $L_p$  有界性が成り立つことを示せた。より一般的な曲面の場合には所期の目的を達成できなかったが、変数型研究の基になる定数型特異積分では、粗い核函数の場合やベクトル値特異積分、多重線形特異積分の連続性について7件の成果を得た。これらは特異積分の研究進展に寄与するものである。

研究成果の概要(英文)：

For singular integrals with variable kernel associated to the surface of the form  $\{x=\Psi(|y|)\}$ , we showed the same result as in the convolution kernel case when the kernel is odd, and  $L_p$  boundedness near  $p=2$  when the kernel is even. We could not achieve expected results for more general kernel cases. But, in the case of convolution type kernel, we published 7 results for singular integrals with rough kernel, vector space valued singular integrals and multilinear singular integrals. These contribute to the development of the study of singular integrals.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：実函数論，函数解析学，調和解析，フーリエ解析

1. 研究開始当初の背景

対象とする特異積分作用素  $T$  は次の形のも

のである。

$$Tf(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{h(|y|)}{|x-y|^{n-1}} \Omega(x, y) f(x-\Phi(y)) dy,$$

ここで  $\Omega(x, y)$  は  $y$  について 0 次斉次で、

$$\int_{S^{n-1}} |\Omega(x, y')| d\sigma(y') < \infty \text{ かつ}$$

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x, y') d\sigma(y') = 0 \text{ を満たし、}$$

$h(t)$  は 1 変数関数で、 $\Phi$  は  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^d$  への写像である。但し、 $S^{n-1}$  は  $\mathbb{R}^n$  の単位

球面で  $\sigma(y')$  は  $\mathbb{R}^n$  上のルベーグ測度から

導かれる  $S^{n-1}$  上の曲面測度である。此

の特異積分は  $\Phi$  従って曲面  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times$

$\mathbb{R}^n; x = \Phi(y)\}$

に関連しているので、曲面に関連した特異

積分と呼ばれている。

この曲面に関連した特異積分の研究を進展

させるのが主目的である。

$d=n, h=1, \Phi(y)=y$  の場合が、1950 年代に

Calderón と Zygmund によって考察されたも

ので、理論の美しさだけでなく偏微分方

程式論に有効に応用された。以来

Calderón-Zygmund の特異積分論として有

名で、特異積分論は調和解析の重要な分野

として発展してきた。

$\Omega$  が合成積型の場合つまり  $\Omega(x, y) = \Omega(y)$

の場合には (a)  $d=n, \Phi(y) = \Psi(|y|)y/|y|,$

(b)  $d=n+1, \Phi(y) = (y, \Psi(|y|)),$  (c-1)

$\Phi(y) = (P_1(y), P_2(y), \dots, P_d(y)),$

$P_j(y)$ : 多項式, (c-2)  $\Phi$

$(y) = (P_1(y), P_2(y), \dots, P_d(y))$ ,

$P_j(y)$ : 一般の場合などに、 $h$  がある種

の条件を満たしていれば、 $T$  は Calderón と

Zygmund の場合と同じような  $L^p(\mathbb{R}^n)$  有

界性などのよい性質を持っていることにつ

いて、多くの研究がある。

しかし、 $\Omega$  が変数型である場合は、Calderón

と Zygmund の時の研究以来いくつかのよい

研究 (代表して Christ, Duoandikoetxea,

Rubio de Francia 達による論文があるが、

そのときに重要な役割をするのが

Calderón と Zygmund によって開発された

「rotation method」である。しかし、一般

の場合は、この「rotation method」が使え

ないので、本質的な工夫が必要となる。上

記(a)の場合、 $\Psi(t)$  が幾つかの条件を満た

すなら  $T$  が  $L^2(\mathbb{R}^n)$  有界であることが、や

っと 2002 年に Tang-Yang によって示された

という状況である。

申請者達は、彼らの論文を精査し、ベク

トル値特異積分である Marcinkiewicz

積分について、Tang-Yang の結果と同様の

$L^2(\mathbb{R}^n)$  有界性を得るための  $\Psi$  に対する条

件を広げることに成功した。

## 2. 研究の目的

(1) 研究の開始当初の背景で述べた (a) の

場合の研究をさらに進め、 $L^2(\mathbb{R}^n)$

有界性、 $L^p(\mathbb{R}^n)$  有界性のための十分

条件・必要条件の探求をし、それと同

時に (b), (c) の場合にアタックするの

が目的である。

(2) 又、偏微分方程式論に応用する際に重

要な働きをする特異積分と函数掛け算

作用素との交換子についての研究を深

めるのも目的である。

## 3. 研究の方法

研究の開始当初の背景で述べた (a), (b),

(c) のそれぞれの場合について、文献調査を

交えた試行考察による研究を進めつつ、研

究分担者、連携研究者、研究協力者とのア

イデアの交換・討論などによって研究の進

展を図る。

<研究体制> 研究体制は次の形である。

国内グループ

: 藪田公三 (研究代表者) 研究取りまとめ

北原和明 (研究分担者) 関数近似論への

応用

佐藤秀一(連携研究者) 定数型からのアイデア提供

北京師範大グループ:

DING Yong (研究協力者) 交換子作用素の研究

XUE Qingying(研究協力者) 変数型特異積分と分数巾特異積分の研究

#### (1) 2008 年度

上記(a)の場合に,北京師範大のXue氏との共同研究で成功した方法を再検討し, $T$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界になるための必要条件の探索を行うとともに, $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界になる $p$ の範囲の限界を探る.このため,此の分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論への応用(研究分担者北原和明氏担当)を含めて行う.その際,国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る.

#### (2) 2009 年度

初年度において上記(a)の研究が思ったように進展しなかった場合には,M. Christ, J. Duoandikoetxea, J. L. Rubio de Francia 達の方法を再検討し,新たな視点から引き続き上記(a)の研究を続ける.と同時に,上記(b)の研究に取り掛かる.定数型の場合,上記(b)の場合の最新の研究は金沢大学の佐藤秀一氏によるものがある.彼の仕事やM. Christ, J. Duoandikoetxea, J. L. Rubio de Francia 達の仕事を参考に変数型の場合の研究に足掛かりを得たい.このため,前年度と同じ体制で研究を続ける.

#### (3) 2010 年度

2009 年度において上記(b)の研究が思ったように進展しなかった場合には,曲面に関連しない変数型特異積分を最初に取り扱ったCalderónとZygmundの最初の論文を精査し,新たなアイデアを開発し引き続き上記

(b)の研究を続ける.と同時に,上記(c)の研究に取り掛かる.このため,前年度と同じ体制で研究を続ける.

#### 4. 研究成果

(1) 研究課題に直接関係した変数型特異積分における成果.

変数型の場合に $L_p$ 有界性を論じる結果を得た.雑誌論文欄⑧に記したように次の論文として公開した.

On the boundedness of singular integrals with variable kernels.

内容としては,曲面に付随した特異積分について,核函数が奇函数の場合には定数型と同じ結果を得た.核函数が偶函数の場合には $p=2$ の近くでしか良い結果を出せなかったが,定数型の場合と同じ結果が得られるのではないかと言う可能性を示せたと考えている.

もう一つ,定数型ではあるが曲面の影響を詳しく調べたもので,雑誌論文欄③で次の成果も得た.

On singular integral operators with rough kernel along surface

内容は,ある種の曲面に沿った特異積分において,曲面の効果を核函数の半径方向の成分に変換する方法を発見した.これにより,ハーディ空間に属する核を持った,ある種の曲面に付随した特異積分の $L_p$ ,重み付き $L_p$ ,トリーベル・リゾルキン空間,ベソフ空間などの種々の函数空間での有界性についての結果を得た.これらは既知の結果を大きく改良するものである.また,この曲面の効果を核函数に半径方向の函数を掛けるということに帰着することにより,精密な評価を得るという方法の開発は,変数型にも生かせるのではないかと考えている.

研究課題に直接関係した成果として、定数型ではあるが、曲面に付随したベクトル値特異積分の  $L_p$  有界性を論じる結果を得た。雑誌論文欄⑤に記したものである。

Boundedness of the Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated to surfaces

内容は、滑らかでない特異積分核を持った、曲面に付随したベクトル値特異積分の重み付き  $L_p$  有界性について論じたもので、既知の結果を大きく改良するものである。

さらに、雑誌論文欄①で次の結果を得た。

A remark on radial  $A_p$  weights

これは、雑誌論文欄③および⑤での重みクラスの条件が単純なものに取り替えることが出来ることを示したもので、同様の重みクラスが過去20年近く、多くの論文で扱われて来たので、この方面の研究への確かな貢献ではないかと思っている。

(2) ベクトル値特異積分における成果.  
雑誌論文欄⑩において、放物型ベクトル値特異積分であるリトルウッド・ペーリー  $g$  関数の  $L_p$  有界性を論じた次の成果を得た。

Parabolic Littlewood-Paley  $g$ -function with rough kernel.

内容は、ユークリッド空間に対角型の放物型距離を導入した空間上で、この放物型距離に付随したベクトル値特異積分であるリトルウッド・ペーリー  $g$  関数および粗い核を持った Marcinkiewicz 作用素の  $L_p$  有界性を示した。既知の結果の本質的改良である。

雑誌論文欄⑨において、同じく放物型ベクトル値特異積分であるリトルウッド・ペーリー作用素について論じた。

Parabolic Littlewood-Paley operators

内容は、ユークリッド空間に論文⑩で扱ったものより遙かに一般的な放物型距離を導入した空間上で、この放物型距離に付随したベクトル値特異積分であるリトルウッド・ペーリー作用素の  $L_p$  有界性、弱  $L_1$  有界性、 $H_1$ - $L_1$  有界性を示した。既知の結果の本質的改良である。

(3) 多重線形特異積分における成果.

多重線形特異積分の重み付きハーディ空間における有界性を論じる結果を得た。雑誌論文欄④に記したように次の論文として発刊した。

Multilinear Calderón-Zygmund operators on weighted Hardy spaces

内容は、多重線形 Calderón-Zygmund 型特異積分について、通常のハーディ空間における有界性についての Grafakos-Kalton の結果を重み付きハーディ空間まで拡張したものである。

また、多重線形特異積分の極大作用素についての重み付きハーディ空間における有界性を論じる結果を得た。雑誌論文欄②に記したように次の論文として発刊された。

Maximal operator for multilinear Calderón-Zygmund singular integral operators on weighted Hardy spaces

内容は、多重線形カルデロン・ジグムント型特異積分の極大作用素について研究したもので、コトラールの不等式の多重線形改良版を示すことにより、重み付きハーディ空間における評価を得たものである。

(4) 研究課題に関連した函数近似論における成果

函数近似においてデカルトの符号則に関連した次の成果を得た. 雑誌論文欄⑫に記したように次の論文として公開した.

Some results related to Descartes' rule of signs.

函数近似においてデカルトの符号則に関連し擬似 Descartes 系について, 雑誌論文欄⑩に記したように次の論文として公開した.

A note on best selection of quasi Descartes systems

内容は, 函数近似においてデカルトの符号則に関連し擬似 Descartes 系を考え, その最良選択法について論じたものである.

多項式による内挿函数列について, 雑誌論文欄⑥に記した結果を得た.

Functions approximated by any sequence of interpolation polynomials

内容は, 多項式による内挿函数列により近似できる函数のクラスについて論じたものである

一般化多項式による内挿函数列について, 雑誌論文欄⑦に記した結果を得た.

Functions approximated by any sequence of interpolating generalized polynomials

内容は, 一般化多項式による内挿函数列により近似できる函数のクラスについて論じたものである

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① K. Yabuta, "A remark on radial Ap

weights", 査読有, Hokkaido Mathematical Journal, 掲載決定.

② W. Li, Q. Xue, K. Yabuta, "Maximal operator for multilinear Calderon-Zygmund singular integral operators on weighted Hardy spaces", 査読有, J. Math. Anal. Appl. Vol. 373, 2011, pp. 384-392.

③ Y. Ding, Q. Xue, K. Yabuta, "On singular integral operators with rough kernel along surface", 査読有, Integr. Equ. Oper. Theory, Vol. 68, 2010, pp. 151-161.

④ W. Li, Q. Xue, K. Yabuta, "Multilinear Calderon-Zygmund operators on weighted Hardy spaces", 査読有, Studia Matematica, Vol. 199, 2010, pp. 1-16.

⑤ Y. Ding, Q. Xue, K. Yabuta, "Boundedness of the Marcinkiewicz integrals with rough kernel associated to surfaces", 査読有, Tohoku Math. J., Vol. 62, 2010, pp. 233-262.

⑥ K. Kitahara, "Functions approximated by any sequence of interpolation polynomials", 査読有, Anal. Theory Appl., Vol. 26, No. 1, 2010, pp. 7-12.

⑦ K. Kitahara, Y. Nishino, "Functions approximated by any sequence of interpolation generalized polynomials", 査読有, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 64, 2010, pp. 411-420.

⑧ Q. Xue, K. Yabuta, "On the boundedness of singular integrals with variable kernels", 査読有, Tohoku Math. J., Vol. 61, 2009, pp. 41-65.

⑨ Y. Ding, Q. Xue, K. Yabuta, "Parabolic Littlewood-Paley operators", 査読有,

Math. Nachr., Vol.282, 2009, pp.125-141.

⑩ K. Kitahara, "A note on best selection of quasi Descartes systems", 査読有, Revue D'analyse Numerique et de Theorie de L'approximation, Vol.38, 2009, pp.154-163.

⑪ Y. Ding, Q. Xue, K. Yabuta, "Parabolic Littlewood-Paley  $g$ -Function with rough kernel", 査読有, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), Vol.24, 2008, pp.2049-2060.

⑫ K. Kitahara, "Some results related to Descartes' rule of signs", 査読有, East J. Approx. Vol.14, No.4, 2008, pp.467-484.

[学会発表] (計3件)

① K. Yabuta, Singular integrals with rough kernel associated to the surface of the form

$\{(x, x_{n+1}) = \phi(|y|)y/|y|, \psi(|y|)\}$ , International Conference on Operator Theory and Harmonic Analysis, Jiaying University, Jiaying, P.R. China, June 17, 2010.

② K. Kitahara, Functions approximated by any sequence of interpolating generalized polynomials, International Conference "Constructive Theory of Functions", Sozopol, Bulgaria, June 8, 2010.

③ K. Yabuta, Marcinkiewicz integral with rough kernel associated to the surface of the form  $\{x = \phi(|y|)y/|y|\}$ , Harmonic Analysis and Partial Differential Equations with Applications, Beijing

Normal University, Beijing, P.R. China, May 29, 2009.

[図書] (計1件)

① 藪田公三, 岩波書店, 特異積分, 2010, 384

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

藪田 公三 (YABUTA KOZO)  
関西学院大学・数理科学研究センター・  
客員研究員  
研究者番号：30004435

### (2) 研究分担者

北原 和明 (KITAHARA KAZUAKI)  
関西学院大学・理工学部・教授  
研究者番号：40195277

### (3) 連携研究者

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI)  
金沢大学・人間社会研究域学校教育系・准  
教授  
研究者番号：20162430