

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 22 日現在

機関番号：35411

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540196

研究課題名（和文） 非線形偏微分方程式に対するポテンシャル論的研究

研究課題名（英文） Potential theoretical research for nonlinear partial differential equations

研究代表者

小野 太幹（ONO TAKAYORI）

福山平成大学・福祉健康学部・准教授

研究者番号：60289270

研究成果の概要（和文）：非線形偏微分方程式に対するポテンシャル論的研究を行い，方程式に対する優調和関数の性質について成果を得た．さらに，非線形偏微分方程式の連続解に対する除去可能集合の特徴づけを行った．また，変動関数指数をもつ関数空間に属する関数に対するソボレフ型不等式に関する研究，優多重調和関数・優重調和関数に関する研究，変動指数をもつ関数空間に属する単調関数の境界挙動に関する研究を行い，成果を得た．

研究成果の概要（英文）：We studied nonlinear potential theory for quasilinear partial differential equations with lower order terms. We investigated properties of superharmonic functions relative to the equation. Moreover, we characterized removable sets for continuous solutions of the equation. Also, we investigated Sobolev's inequality for functions in function spaces of variable exponent, super-polyharmonic functions and superbiharmonic functions, and boundary behavior of monotone functions in function spaces with variable exponent.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形偏微分方程式，ポテンシャル論，優調和関数，除去可能集合，変動関数指数，関数空間，ソボレフの不等式

1. 研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式，特に， p -Laplace 方程式に低階項を加えたタイプの非線形偏微分方程式に対するポテンシャル論的研究が十分進んでいなかった．また，変動関数指数をもつ関数空間の研究も歴史が浅くさらなる発展が期待されていた．

2. 研究の目的

非線形偏微分方程式，関連する方程式に対するポテンシャル論的研究の発展させる．T

特に，対応する優調和関数の性質，除去可能集合について調べる．変動関数指数をもつ関数空間の研究を進める．

3. 研究の方法

ポテンシャル論関係者が参加する広島大学のポテンシャル論セミナーに参加し，情報収集と意見交換を図るとともに，随時研究成果を報告しセミナー参加者等と討議する．また，研究集会やセミナーに参加し，関連する

研究をしている人々とも交流をもち、情報収集、意見交換を図り、研究対象への理解を深める。

4. 研究成果

p -Laplace 方程式 ($1 < p < \infty$) に低階項を加えたタイプの非線形偏微分方程式 $-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \nabla \operatorname{grad} u(x)) + B(x, u) = 0 \cdots \textcircled{1}$

に対するポテンシャル論的研究を行った。特に、方程式①に対する優調和関数の性質、及び、右辺にラドン測度 μ を含む非線形偏微分方程式

$-\operatorname{div}(|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \nabla \operatorname{grad} u(x)) + B(x, u) = \mu \cdots \textcircled{2}$

の解と優調和関数との関係について調べた。また、方程式②において、 μ がある増大条件を満たすとき、方程式②の解の Holder 連続指数が具体的に決定できることを示し、その応用として、方程式①の Holder 連続解に対する除去可能集合がハウスドロフ測度で特徴づけられることを示した。これは、Kilpelainen と Zhong(2002)によって示された低階項が無い場合の拡張にあたる。さらに、方程式②の解の勾配の可積分性も示した。加えて、重み $w(x)$ 付き非線形偏微分方程式

$-\operatorname{div}(w(x)|\operatorname{grad} u(x)|^{p-2} \nabla \operatorname{grad} u(x)) + B(x, u) = 0$

の Holder 連続解に対する除去可能集合についても重み付きハウスドロフ測度で特徴づけられ、低階項が無い重み $w(x)$ 付きの場合を扱った Makalainen(2008)の結果も拡張できることを報告した。

変動指数をもつ Morrey 空間において、Hedberg の方法を用いることにより、ソボレフの不等式、Trudinger 指数積分不等式と二重指数積分不等式に関する成果を得た。変動指数をもつ Morrey 空間に属する関数のリースポテンシャルの連続性についても結果を得た。これらの研究から、ソボレフ空間だけでなく、Morrey 空間の解析の重要性を再認識できた。Morrey ポテンシャルの Trudinger 指数積分不等式を示した Serrin の結果の拡張として、一般化された Morrey 空間 $L^{1,p}$ に属する関数のリースポテンシャルに対する Trudinger 型指数積分不等式やソボレフの不等式に関する結果を示した。Orlicz 空間を一般化した空間である Musielak-Orlicz 空間に属する関数のポテンシャルに対する容量についての基本的な性質を調べた。球に対する容量の評価を与え、その評価の応用も与えた。

関数の意味でラプラス作用素 $(-\Delta)$ を m 回繰り返して非負となる m 次の優多重調和関数(super-polyharmonic function of order m) の孤立特異点や境界付近での表現定理に関する研究を行った。優多重調和関数は、リー

ス分解定理により、局所的にリースポテンシャルと多重調和関数の和として表すことができることを利用して、球面積分平均に関する Poisson-Jensen の公式を与えた。さらに、この Poisson-Jensen の公式を利用し、球面積分平均の評価からリース測度の評価を導くことにより、R. Supper(2009)による劣調和関数の正規族に関する Montel 型定理を優多重調和関数へ拡張し、球面積分平均がある種の一様な増大度をもつ優多重調和関数列が容量零の集合を除いて収束する部分列をもつことを示した。また、単位球上の優重調和関数の球面積分平均の境界付近での増大度を与えたとき、優重調和関数が一般化したポテンシャルと重調和関数の和で分解できることを示した。

最大値・最小値原理を満たす単調関数の弱微分がルベーグの L^p 関数であるとき、 $p > n-1$ であれば、調和関数が満たす平均値不等式と同様な不等式が成り立つ。この不等式を利用して、ある種の一様に連続な変動指数をもつソボレフ空間に属する単調関数の境界挙動に関するリンデレーフ型定理を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 23 件)

- ① T. Ono, Removable sets for Hölder continuous solutions of quasilinear elliptic equations with lower order terms, to appear in Math. Ann. (査読有)
- ② F. - Y. Maeda, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Capacity for potentials of functions in Musielak-Orlicz spaces, Nonlinear Anal. **74**, no. 17, (2011), 6231-6243. (査読有)
doi:10.1016/j.na.2011.06.003
- ③ Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Riesz potentials and Sobolev embeddings on Morrey spaces of variable exponents, Complex Vari. Elliptic Equ. **56**, No. 7-9, (2011), 671-695. (査読有)
DOI:10.1080/17476933.2010.504837
- ④ P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces, Manuscripta Math. **135**, (2011), 381-399. (査読有) DOI: 10.1007/s00229-010-0421-x
- ⑤ T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, A Montel type result for super-polyharmonic functions on \mathbb{R}^n , Potential Anal. , Potential Anal., (査

- 読有), Vol. 34, 2011, 89-100.
Doi:10.1007/s11118-010-9183-z
- ⑥ Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Weighted Orlicz-Riesz capacity of balls, Proc. Amer. Math. Soc. **138**, (2010), 4291-4302. (査読有)
doi:10.1090/S0002-9939-2010-10510-5
- ⑦ Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev's inequality for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of integral form, Math. Nachr. **283**, (2010), No. 9, 1336-1352. (査読有)
doi:10.1002/mana.200710122
- ⑧ Y. Mizuta, E. Nakai, T. Ohno and T. Shimomura, Boundedness of fractional integral operators on Morrey spaces and Sobolev embeddings for generalized Riesz potentials, J. Math. Soc. Japan **62**, No. 3, (2010), 707-744. (査読有)
DOI:10.2969/jmsj/06230707
- ⑨ P. Hästö, Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev inequalities for Orlicz spaces of two variable exponents, Glasgow Math. J. **52** (2010), 227-240. (査読有)
doi:10.1017/S0017089509990292
- ⑩ T. Futamura, Y. Mizuta and T. Shimomura, Integrability of maximal functions and Riesz potentials in Orlicz spaces of variable exponent, J. Math. Anal. Appl. **366** No. 2, (2010), 391-417. (査読有)
Doi:10.1016/j.jmaa.2010.01.053
- ⑪ Y. Mizuta, T. Ohno, T. Shimomura and N. Shioji, Compact embeddings for Sobolev spaces of variable exponents and existence of solutions for nonlinear elliptic problems involving the $\Delta_p(x)$ Laplacian and its critical exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **35** (2010), 115-130. (査読有)
doi:10.5186/aasfm.2010.3507
- ⑫ Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, Math. Inequal. Appl. **13** (2010), 99-122. (査読有)
doi:10.7153/mia-13-08
- ⑬ Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potential spaces of variable exponents near 1 and Sobolev's exponent, Bull. Sci. Math. **134** (2010), 12-36. (査読有)
doi:10.1016/j.bulsci.2009.09.004
- ⑭ L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, Y. Mizuta and T. Shimomura, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **34** (2009), 503-522. (査読有)
<http://www.acadsci.fi/mathematica/Vol34/DieningHarjulehtoHastoMizutaShimomura.html>
- ⑮ Y. Mizuta and T. Shimomura, Continuity properties of Riesz potentials of Orlicz functions, Tohoku Math. J. **61** (2009), 225-240. (査読有)
doi:10.2748/tmj/1245849445
- ⑯ Y. Mizuta, T. Ohno and T. Shimomura, Integrability of maximal functions for generalized Lebesgue spaces with variable exponent, Math. Nachr. **181**, February (2008), No. 3, 386-395. doi:10.1002/mana.200510609
- ⑰ T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, Riesz decomposition for superbiharmonic functions in the unit ball, Hokkaido Math. J., Vol. 38, 2009, 683-700. (査読有)
<http://hmj2.math.sci.hokudai.ac.jp/1334/>
- ⑱ Y. Mizuta and T. Shimomura, Sobolev embeddings for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, J. Math. Soc. Japan **60**, No. 2, May (2008), 583-602. (査読有)
doi:10.2969/jmsj.06020583
- ⑲ T. Futamura, K. Kitaura, Y. Mizuta, Isolated singularities, growth of spherical means and Riesz decomposition for superbiharmonic functions, Hiroshima Math. J., Vol. 38 (2008), 231-241. (査読有)
<http://projecteuclid.org/euclid.hmj/1220619459>
- ⑳ T. Ono, Superharmonic functions and differential equations involving measures for quasilinear elliptic operators with lower order terms, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **33** (2008), 171-204 (査読有)
<http://www.acadsci.fi/mathematica/Vol33/vol33pp171-204.pdf>
- [学会発表] (計 15 件)
- ① 小野太幹; 重み付き準線形楕円型方程式の解のヘルダー連続性について, 2011年11月5日, 岐阜大学
- ② 下村 哲, Exponential integrability of Riesz potentials of Orlicz functions,

- ポテンシャル論研究集会（岐阜大学），
2011年11月5日.
- ③ 下村 哲, Iterated maximal functions in variable exponent Lebesgue spaces, 日本数学会秋季総合分科会（信州大学），2011年9月30日.
 - ④ 下村 哲, Weighted Sobolev inequality in Musielak-Orlicz space, ポテンシャル論研究集会（大分大学），2010年11月5日.
 - ⑤ 下村 哲, Sobolev inequalities for variable exponent Orlicz spaces, 第49回実函数論・函数解析学合同シンポジウム（東京理科大学），2010年8月2日.
 - ⑥ 下村 哲, Orlicz-Sobolev capacity of balls, 日本数学会春季総合分科会（慶応大学），2010年3月24日.
 - ⑦ 下村 哲, Maximal functions in variable exponent spaces: limiting cases of the exponent, 日本数学会秋季総合分科会（大阪大学），2009年9月27日.
 - ⑧ Takayori ONO ; Removable sets for continuous solutions of quasilinear elliptic equations with lower order terms; International Workshop on Potential Theory 2009. (Hokkaido University, Department of Mathematics), September 2, 2009
 - ⑨ Tetsu Shimomura, Sobolev inequalities in variable exponent Orlicz spaces, International Workshop on Potential Theory in Hokkaido 2009 (Hokkaido University, Department of Mathematics), September 2, 2009.
 - ⑩ 二村俊英, 変動指数をもつ関数空間におけるリースポテンシャルのハーディー型不等式, 日本数学会年会, 2009年3月28日, 東京大学.
 - ⑪ 小野太幹 ; On solutions of quasilinear elliptic equations with general structure, ポテンシャル論とその関連分野研究集会（京都大学数理解析研究所），2009年2月17日.
 - ⑫ 下村 哲, Integrability of maximal functions and Riesz potentials in Orlicz spaces of variable exponent, ポテンシャル論とその関連分野研究集会（京都大学数理解析研究所），2009年2月17日.
 - ⑬ 下村 哲, Continuity properties for Riesz potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent, 日本数学会秋季総合分科会（東京工業大学），2008年9月26日.
 - ⑭ Tetsu Shimomura, Sobolev's inequalities for Riesz potentials of

functions in the generalized Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\log L)^{q(\cdot)}$, FSDONA Workshop, Helsinki University, Finland, August 22, 2008.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小野 太幹 (ONO TAKAYORI)
研究者番号：60289270

(2) 研究分担者

二村 俊英 (FUTAMURA TOSHIHIDE)
研究者番号：90387605
下村 哲 (SHIMOMURA TETSU)
研究者番号：50294476