

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 4月 4日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2011

課題番号：20540197

研究課題名（和文） 特異偏微分方程式の解空間の構造

研究課題名（英文） Structure of solution spaces for singular partial differential equations.

研究代表者

梶木屋 龍治(KAJIKIYA RYUJI)

佐賀大学・工学系研究科・教授

研究者番号：10183261

研究成果の概要（和文）：

(1) 係数が境界に特異性を持つ楕円型方程式について、ディリクレ境界条件の下で解の存在を証明した。滑らかな正値解が少なくとも1つ存在すること及び符号変化する解が無限に多く存在することを証明した。(2) 係数関数が境界に特異性を持つ1次元  $p$  ラプラス方程式に対して、解の分岐が起きることを証明した。(3) 無限大ラプラス作用素を持つ放物型方程式の解が時刻無限大で減衰することを証明し、その減衰度を詳細に調べた。

研究成果の概要（英文）：

(1) We prove the existence of solutions for semilinear elliptic equations with the singular weight on the boundary. We prove the existence of a smooth positive solution and infinitely many sign-changing solutions. (2) We prove that the bifurcation occurs for one-dimensional  $p$ -Laplace equations with singular weights on the boundary. (3) For degenerate parabolic equations with the infinity Laplacian, we prove that solutions decay as time tends to infinity and investigate the decay order in detail.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、非線形偏微分方程式

## 1. 研究開始当初の背景

様々な偏微分方程式の研究において、境界に特異性を持つ方程式及び退化する偏微分方程式が重要な役割を持つことが知られるようになってきた。特に楕円型偏微分方程式は、時間発展方程式の定常状態を記述する方程式として解の漸近挙動、安定性などに深く関わっている。また解の分岐を調べることは、

解空間の全体像を明確にする上で極めて有効な手法である。そこで本研究では、境界に特異性を持つ楕円型偏微分方程式の正値解及び符号変化する解の存在について調べた。さらに  $p$ -ラプラス方程式の分岐構造及び退化放物型方程式の解の大域的挙動についての研究を行った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、半線形楕円型偏微分方程式及び準線形放物型方程式の解空間の構造を明らかにすることである。特に、以下のような特異偏微分方程式を考察する。

- (1) 係数関数が領域の境界に特異性を持つ場合について、正值解の存在、及び正值性を持たない解が無限に多く存在することを示す。
- (2) 微分作用素が退化する1次元  $p$  ラプラス方程式の解の分岐を証明する。
- (3) 無限大ラプラス作用素を持つ放物型方程式の解が、時刻無限大で零に収束することを証明する。またそのときの解の減衰度を正確に求める。

## 3. 研究の方法

本研究を推進するためには、様々な数学的道具及び資料が必要となる。このため、多くの専門書、論文、文献、数学雑誌、プレプリント等の参考資料を集めた。次にこれら进行分析、整理して既知の結果を十分に把握し、理解して研究の基礎とした。また集めた資料は、パソコン内にデジタル化したデータとして保存し、これらを常時参照できるようにした。これらの準備の下に、方程式の考察を行った。計算機による数値シミュレーションの助けを借りて、解の形状と非線形項の関係を予想し、正則な解を持つ特異な偏微分方程式の構造を解明した。さらに他研究者との討論を行い、国内外の多くの研究集会に出席し、研究結果を発表した。

## 4. 研究成果

半線形楕円型偏微分方程式及び準線形放物型方程式の解空間の構造について調べ、以下のような特異偏微分方程式についての結果が得られた。

- (1) 係数関数が領域の境界に特異性を持つ場合について、正值解の存在、及び符号変化する解が無限に多く存在することを証明した。特異性を持つ方程式に対しても比較定理が成り立つことを証明し、これを使って正值解の一意性を証明した。また、正值解と限らない無限に多くの解の存在は、変分法を使って証明した。
- (2) 微分作用素が退化する1次元  $p$  ラプラス方程式の解の分岐を証明した。微分作用素が準線形であるため、リアプノフ・シュミットの方法が使用できない。そのため写像度を利用し、Rabinowitzの大域分岐理論を使って分岐を示した。
- (3) 無限大ラプラス作用素を持つ放物型方程式の解が、時刻無限大で零に収束することを証明した。またそのときの解の減衰度を正確に求めた。
- (4) 境界が滑らかでない劣線形楕円型偏微分方程式に対して比較定理を証明した。さらに

これを使って薄い領域における正值解の先験的評価を与えた。これは、領域の薄さを使って解の最大値を精密に評価するものである。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

① Ryuji Kajikiya, Yong-Hoon Lee and Inbo Sim, Bifurcation of sign-changing solutions for one-dimensional  $p$ -Laplacian with a strong singular weight:  $p$ -superlinear at infinity. *Nonlinear Analysis*, T.M.A. 査読有 Vol. 74, (No. 17), (2011), pp. 5833-5843.

② Ryuji Kajikiya, Sublinear elliptic equations with singular coefficients on the boundary. *J. Math. Soc. Japan*, 査読有, Vol. 63, (No. 1), (2011), pp. 263-294.

③ Ryuji Kajikiya, Superlinear elliptic equations with singular coefficients on the boundary. *Nonlinear Analysis*, T.M.A. 査読有, Vol. 73, (No. 7), (2010), pp. 2117-2131.

④ Ryuji Kajikiya, Yong-Hoon Lee and Inbo Sim, On a criterion for discrete or continuous spectrum of  $p$ -Laplace eigenvalue problems with singular sign-changing weights. *Nonlinear Analysis*, T.M.A. 査読有, Vol. 72 (No. 7-8), (2010), pp. 3515-3534.

⑤ Ryuji Kajikiya, Yong-Hoon Lee and Inbo Sim, Bifurcation of sign-changing solutions for one-dimensional  $p$ -Laplacian with a strong singular weight;  $p$ -sublinear at infinity. *Nonlinear Analysis*, T.M.A. 査読有, Vol. 71 (No. 3-4), (2009), pp. 1235-1249.

⑥ Ryuji Kajikiya, A priori estimates of positive solutions for sublinear elliptic equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 査読有, Vol. 361 (No. 7), (2009), pp. 3793-3815.

⑦ G. Akagi, P. Juutinen, R. Kajikiya,  
Asymptotic behavior of viscosity  
solutions for a degenerate parabolic  
equation associated with the infinity  
-Laplacian.  
Math. Ann. 査読有, Vol. 343 (No. 4) (2009),  
pp. 921-953.

⑧ Ryuji Kajikiya,  
Comparison theorem and uniqueness of  
positive solutions for sublinear elliptic  
equations.  
Archiv der Mathematik, 査読有, Vol. 91 (No.  
5) (2008), pp. 427-435.

⑨ Ryuji Kajikiya, Yong-Hoon Lee and Inbo  
Sim,  
One-dimensional  $p$ -Laplacian with a strong  
singular indefinite weight,  
I. Eigenvalue.  
J. Differential Equations, 査読有,  
Vol. 244 (No. 8) (2008), pp. 1985-2019.

[学会発表] (計 38 件)

1. 梶木屋 龍治,  
Non-even positive solutions of the one  
dimensional Henon equation  
2012年3月26日-3月29日 日本数学会  
東京理科大学
2. 梶木屋 龍治,  
Least energy solutions and group  
invariant solutions of the Henon equation  
2012年3月26日-3月29日 日本数学会  
東京理科大学
3. 梶木屋 龍治,  
Symmetry of positive solutions for the  
generalized Henon equation.  
2012年3月5日-7日 「第4回 名古屋微  
分方程式研究集会」名古屋大学
4. 梶木屋 龍治,  
Stability and symmetry of positive  
solutions for the Emden-Fowler equation.  
2012年2月10日-11日,  
"2012 International Workshop on Nonlinear  
PDE and Applications".  
Pusan National University, Pusan, Korea,
5. 梶木屋 龍治,  
Non-radial positive solutions of the Henon  
equation. 2012年2月8日-10日,  
"International Symposium on Nonlinear  
Analysis and Optimization 2012"

Pukyong National University, Pusan,  
Korea,

6. 梶木屋 龍治,  
Least energy solutions of the generalized  
Henon equation.  
2012年2月3日-4日 「松山解析セミナー」  
愛媛大学
7. 梶木屋 龍治,  
Non-radial positive solutions of the Henon  
equation. 2011年12月23日-25日 「第37  
回発展方程式研究会」岐阜大学
8. 赤木 剛朗, 梶木屋 龍治,  
Fast diffusion 方程式の解の漸近形の安定  
性解析(空間  $N$  次元の場合).  
2011年9月28日-10月1日 日本数学会 信  
州大学
9. 梶木屋 龍治,  
エノン方程式の球対称でない解の存在.  
2011年9月28日-10月1日 日本数学会 信  
州大学
10. 梶木屋 龍治,  
エノン方程式の非球対称解の存在について  
2011年9月8日-9日 「岐阜大学における微  
分方程式セミナー」岐阜大学,
11. 梶木屋 龍治,  
Existence of non-radial positive  
solutions for the generalized Henon  
equation. 2011年8月1日-5日  
Loughborough University, Loughborough,  
England, Equadiff 2011.
12. 梶木屋 龍治,  
Existence of non-radial solutions for the  
generalized Henon equation.  
2011年6月20日-24日  
2011 International Workshop on Nonlinear  
PDE and Applications.  
Pusan National University, Pusan, Korea,
13. 梶木屋 龍治,  
一般化されたエノン方程式の非球対称解  
2011年5月27日 九州関数方程式セミナー,  
福岡大学セミナーハウス,
14. 梶木屋 龍治,  
Non-even least energy solutions of the  
Emden-Fowler equation.  
2011年2月5日-6日 「振動理論ワークシ  
ョップ --徳島 2011」徳島大学,

15. 梶木屋 龍治,  
Stability of solutions for fast diffusion equations. 2010年12月18日-19日 京都大学, 「微分方程式の総合的研究」
16. 梶木屋 龍治,  
Asymptotic behavior of solutions for p-Laplace parabolic equations. 2010年11月10日-12日 研究集会「新しい視点からの現象解析と関数方程式」 数理解析研究所, 数理解析研究所講究録 Vol. 1750, 29-35
17. 赤木 剛朗, 梶木屋 龍治,  
fast diffusion 方程式の解の漸近形の安定性解析. 2010年9月22日-25日 日本数学会 名古屋大学
18. 梶木屋 龍治,  
Asymptotic behavior of solutions of the porous medium equation. 2010年8月27日 University of Ulsan, Ulsan, Korea, 2010年8月30日 Pusan National University, Pusan, Korea, The invited lecture.
19. 梶木屋 龍治,  
放物型 p ラプラス方程式の解の漸近挙動 2010年5月7日 九州関数方程式セミナー, 福岡大学セミナーハウス,
20. 赤木 剛朗, 梶木屋 龍治,  
Asymptotic profiles of sign-changing solutions for parabolic equations associated with p-Laplacian. 2010年3月24日-27日 日本数学会 慶應義塾大学
21. 梶木屋 龍治,  
Bifurcation of a positive solution for one-dimensional p-Laplacian. 2010年3月24日-27日 日本数学会 慶應義塾大学
22. 梶木屋 龍治,  
Asymptotic behavior of solutions for p-Laplace parabolic equations. 2010年3月2日  
"The invited lecture "  
University of Ulsan, Ulsan, Korea,
23. 梶木屋 龍治,  
1次元 p ラプラス方程式の正值解の分岐. 2010年2月10日-11日 研究集会「振動理論ワークショップ-倉敷 2010」岡山理科大学 国際交流センター,
24. 梶木屋 龍治,  
ある非線形放物型方程式の解の漸近形について, 2009年12月23日-25日 第35回発展方程式研究会, 赤木剛朗氏との共同講演, 中央大学,
25. 梶木屋 龍治,  
順序バナッハ空間における峠の定理とその応用. 2009年11月11日 早稲田大学セミナー, 早稲田大学,
26. 梶木屋 龍治,  
Eigenvalues for p-Laplacian problems with a singular sign-changing weight. 2009年9月24日-27日 日本数学会 大阪大学
27. 梶木屋 龍治,  
順序バナッハ空間における峠の定理とその応用. 2009年9月24日-27日 日本数学会 大阪大学
28. 梶木屋 龍治,  
順序バナッハ空間における峠の定理とその応用. 2009年9月16日-18日 長崎商工会議所, 研究集会「第5回非線型の諸問題」
29. 梶木屋 龍治,  
境界に特異性を持つ p-Laplacian の固有値問題, 2009年8月31日-9月1日 研究集会「広島大学における微分方程式セミナー」広島大学,
30. 梶木屋 龍治,  
Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications. 2009年7月20日-24日, "Equadiff 12". Masaryk University, Brno, Czech Republic,
31. 梶木屋 龍治,  
Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications. 2009年6月29日-7月2日 "International Workshop on Nonlinear PDE and Applications". Pusan National University, Pusan, Korea,
32. 梶木屋 龍治,  
Mountain pass theorem in ordered Banach spaces and its applications 2009年6月8日-6月10日 研究集会「変分問題とその周辺」 京都大学数理解析研究所, 数理解析研究所講究録 Vol. 1671, 113-119

33. 梶木屋 龍治,  
薄い領域における劣線形楕円型方程式,  
2009年5月9日 熊本大学応用解析セミナー 熊本大学,

34. 赤木 剛朗, P. Juutinen, 梶木屋 龍治,  
Asymptotic behavior of solutions for a  
degenerate parabolic equation with  
inhomogeneous Dirichlet data.  
2008年9月24日-27日 日本数学会 東京工業大学

35. 梶木屋 龍治,  
境界に特異性を持つ優線形楕円型方程式  
2008年9月24日-27日 日本数学会 東京工業大学

36. 梶木屋 龍治,  
境界に特異性を持つ半線形楕円型方程式  
2008年7月4日 九州関数方程式セミナー,  
九州大学,

37. 梶木屋 龍治,  
Sublinear elliptic equations with  
singularity on the boundary.  
Superlinear elliptic equations with  
singularity on the boundary.  
2008年6月9日-6月13日  
"Intensive Lecture Program and  
International Conference on Nonlinear PDE  
and Applications."  
Pusan National University, Pusan, Korea,

38. 梶木屋 龍治,  
境界に特異性を持つ半線形楕円型方程式  
2008年4月19日 応用解析研究会 早稲田大学

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

梶木屋 龍治(KAJIKIYA RYUJI)  
佐賀大学・工学系研究科・教授  
研究者番号：10183261

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：