

機関番号：10101

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540199

研究課題名 (和文) C スター環上の流れ

研究課題名 (英文) Flows on C*-algebras

研究代表者

岸本 晶孝 (KISHIMOTO AKITAKA)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：00128597

研究成果の概要 (和文) : 統計力学モデルで現れるような C スター環上の流れについて調べる。「準対角的流れ」「MF 流れ」などの概念を導入した。これらは AF 環上の流れのなかでも「AF 流れ」といわれる行列環上の流れで正確に近似できる流れを一般化する概念である。またそのような流れによる接合積の分類に向けて、そのイデアル構造とトレース構造とを調べる。特に原始イデアル構造が双対流れのもとで単調になる条件を特徴づける。

研究成果の概要 (英文) : I have investigated the flows on C*-algebras which may appear as models in statistical mechanics and introduced notions such as quasi-diagonal flows and MF flows. Those generalize AF flows on AF algebras which are strictly approximated by flows on matrix algebras. Furthermore towards classification of crossed products by such flows I have worked on the ideal and trace structures of the crossed products. In particular, a characterization for the primitive ideals to be monotone under the dual flow is obtained.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環

1. 研究開始当初の背景

C スター環上の微分の研究 (結局は一様連続な流れの研究と判明) が一段落したあと、C スター環上の流れの本格的な研究は 1970 年代から 80 年代にかけて行われその後停滞した。このとき主導したのは、Sakai, Bratteli, Robinson らであり、研究代表者の現在にいたる共著者でもある。このとき目指したことは AF 環など物理モデルとしてあらわれる C スター環上の流れの解

析である。90 年代には研究代表者は内部性から一番遠いと思われるローリン流れを導入し、その純粋無限 C スター環上での例や AT 環上での例に加えて、その基本的性質を明らかにした。これによって一様連続な流れからローリン流れまで流れには様々な可能性があることが明確になったが、流れの何らかの同類のもとでの分類理論に至るような精緻な理論が組み立てられる段階には達していない。C スター環の発達の歴史をみ

れば、なお定性的理論の構築が望まれる段階である。

2. 研究の目的

ローリン流れに現れる条件はかなり強い。それだけに例を作るのは困難であったが、予測としてはすべて互いにコサイクル同値になるということで単純明快なものである。このことは具体的な例においては示されている。ひとつにはこの問題にも挑戦するというのも目的である。

他方、流れが時間の流れを表すのであれば、流れは多様に存在する。つまり現実の流れはローリン流れからはほど遠く、多様性を許容しなければならない。通常受け入れられているのは、内部近似可能性という条件である。これは局所的ハミルトニアンが観測可能ということからもっともな仮定と思われるが、それが内部近似可能の数学的内容の厳密さを意味するものか必ずしも明らかでない。それに対して是非必要な条件は、すべての温度での平衡状態が存在するという条件である。(これについても異論のある可能性はあるが、今は論じない。) いろいろな条件が存在するかもしれないが、そのような条件をつまびらかにしその間の関係を追及するというのもう一つの目的である。なお温度といった場合数学的には負の温度も許容してしまうが、正の温度に対する平衡状態の存在を導くような状況がありうるかどうかも考えたい。

実のところ、流れのコサイクル同値による分類は、その双対となる流れの厳密な分類と同値である。これは竹崎高井の双対定理といわれるものであるが、この双対性を利用して以下の問題を考える。第一は接合積といわれるCスター環の分類が問題となる。ローリン流れの場合は(他の人々による一般論により)すでにこの分類は完了しているが、前の段落で述べた場合は、Cスター環は単純でなくまたトレースといわれる汎関数をたくさん持つ。このCスター環は複雑なイデアル構造を有するが、それが比較的単純になる場合、またその計算を可能にする手段を探りたい。後者に関しては具体的には基底状態天井状態がどこまでイデアル構造を決定するかを調べる。トレースについては平衡状態と正確に対応するための条件を明らかにしたい。そのうえで、1次元の量子系に対応するような場合に接合積を決定することを目指したい。この場合には少なくともトレース構造は決定可能であるから、最初に考

える問題として適当であるように思われる。

さらにその上の双対流れを決定しなければならない。双対流れのイデアル構造の上でのふるまいが高度に非自明であることからCスター環上での振る舞いがどの程度決定されるかを考えたい。

3. 研究の方法

物理系で現れるような流れの研究は幾分Cスター環的手法の効かない領域であるように思われる。例えば生成作用素の定義域はバナッハ環にしかならない。従って関数解析的手法も用いなければならない。また接合積は豊かなイデアルをもつことから、これも単純Cスター環に対して培われてきた従来の手法は使えない。

従って幾分暗中模索の気味があるが、目的で述べたなかでもみた具体的問題に対しては次のように取り組む。

Cスター環にはすでにいくつもの「性質」が導入されている。これを「流れ」をふくむ「力学系」にまで拡張する。単純に考えれば、単に接合積の性質として考えればよい、ということになりそうであるがそうではない。接合積としてひとまとめに考えれば「流れ」が見失われる。流れに対する性質とみなされるような拡張を考えたい。とくに内部近似可能性と有限次元系による近似の概念を精査する。

後段でのべたイデアル、トレースについては従来のCスター環論の延長として考えられる。

4. 研究成果

ヒルベルト空間上の作用素の準対角性の概念は古い。それはCスター環にも準用されたが、さらに流れにも適用するというのが最初の結果である。

流れに対しては二通りの拡張の仕方が存在する。Cスター環とその上の流れが与えられたとする。それが準対角的であるとは、ある忠実な共変表現が存在し、その表現が準対角的であると定義する。表現が準対角であるとは、それと可換な有限階数の射影の増大列で表現と漸近的に可換になり恒等変換に収束するものがあることである。さてここで「流れと交換する」の意味を厳密に定める必要がある。ひとつは流れを導出するユニタリ群の生成作用素と交換すること。この作用素は一般には非有界なので、ここで少し従来の準対角的の概念から外れるかなりきつい条件である。もうひとつは流れをその射影の値域に制限してもそ

ここで「流れ」として自律しているという若干間接的な弱い条件。前者を準対角的 (quasi-diagonal) といい、後者を擬対角的 (pseudo-diagonal) というようにする。さらにすべての共変表現が QD ならばその流れを強 QD といい、すべての共変表現が PD ならばその流れを強 PD というようにする。表現に対しては QD ならば PD である。

実は流れに対する概念としては QD と PD とは同値であることが判明した。この PD ならば QD の証明のなかで共変表現に操作を加えるため、強 QD と強 PD の関係は出てこない。強 QD であるような流れの例としては AF 流れがある。これは、一番厳密な意味で、有限次元 C スター環上の流れで近似できる流れで、その C スター環も AF 環に限られる。AF 流れはもちろん内部近似可能でもある。

QD な C スター環上の内部近似可能な流れは強 PD である。従って QD である。可換環での例から、内部近似可能性と QD の間には直接的関係はない。強 QD と強 PD は同値ではないと思われるが詳細は明確でない。

QD 環の概念を一般化した MF 環という概念がある。コンパクト作用素の無限列からなる環を 0 に収束する列からなる環で割る。そのような環に埋め込まれる可分な C スター環を MF 環という。AF 環は MF 環だが、それよりはるかに広いクラスをなしている。つまり、コンパクト作用の環を適当に行列環で置き換えることにより、これが有限次元環のなんらかの極限としてあらわされることが分かるが、そこで使われる写像は準同型である必要はなく、「漸近的に」準同型でありさえすればよい。

さて上の概念を一般化するのが次の結果である。コンパクト作用素の環の上に流れをひとつ固定する。このとき流れはいつでもユニタリ群によって導出されるが、そのユニタリ群のスペクトルが実軸すべてであると仮定する。その流れは、上に述べたコンパクト作用素の無限列からなる環の上に、さらにその商環のうえに流れを起こす。技術的なことは省くとして、流れが MF 流れであるとは、そのような流れに埋め込まれることをいう。前段落から予想がつくように、この流れは有限次元環上の流れで、非常に弱い意味で、近似される。この意味するところは、有限次元環上の流れからなる帰納的な列として正確に形式化される。

最初に導入した QD 流れは MF 流れである。MF 流れは一般には QD 流れで

ないと思われるが、C スター環が核型の場合にはそうなる。とくに環が AF の場合はそうである。いまのところ、MF 流れが物理系にあらわれる時間発展を一番ひろくとらえているように思われる。この有限次元系による近似は計算可能性を表しているようにも思えるがこれは今後の課題である。

種々の流れの性質の間の関係を AF 環の場合にまとめると以下ようになる。強い方から、近似 AF 流れ、AF 核流れ、内部近似可能な流れ、QD 流れ、MF 流れ、KMS 状態を持つ流れ (KMS 流れ)。うえで述べた流れはすべてコサイクル摂動に関して不変である。近似 AF 流れとは AF 流れをふくむそのような流れのことで、AF 核流れとは、流れの生成作用素が AF を核として含むこと (正確には局所的有限次元環を核として含むこと)。一度は AF 核流れがすべての流れを含むと予想されたこともあるがそうではない。上述の種々の性質の間の関係では不明なこともおおく今後の課題と考える。また特定の AF 環では KMS 流れでない流れの存在が証明されているが、これがすべての単純 AF 環で成り立つかどうかはいまだ明らかでない。

以上のような手法では、流れのコサイクル同値類の分類には到達し得ない。これを目標にするのであれば、そのような流れによる接合積の分類をまず目指さなければならない。そのための予備的な研究を行う。つまり、C スター環の代数的不変量を計算する前に必要なイデアル構造とトレース構造の研究である。

30 年ほど前、ある一般的な状況のもとで、接合積の原始イデアルは基底状態または天井状態に関連した表現の核であることが明らかになった。しかし一般的には原始イデアルは双対流れのもとで単調にならないことも明らかで、そのためイデアル構造ははるかに複雑であると思われた。一般の物理的設定では基底状態はスペクトルギャップといわれるハミルトニアンにスペクトルに空隙をもつ。このような空隙が存在しないときは原始イデアルの双対流れによる振る舞いが単調になることを予想して実際それを証明した。問題はスペクトルギャップが存在しないという条件を如何に C スター環上の流れに対する条件として表現するかであったが、これを流れのスペクトル解析として書き表した。正確には 0 の周りの任意に小さな流れのスペクトル空間が環として全体を生成する、さらにこの条件をすべての不変な遺伝的

部分環にも要求するというものである。この条件は、すべての原始イデアルが双対流れのもとで単調であるという条件と同値である。

さきに述べたエネルギーギャップがないという条件は、いくらでも質量の小さな粒子が存在するという仮定から得られる。これは数学的にはテンソル積で得られるので、物理的性質には影響を与えない。

接合積には、KMS 状態といわれる元の C スター環上の状態から出発し何らかの細工を施すことでトレースが作り出される。このことは半ば知られていたが研究代表者はむかし共著者とともに正確に定式化した。しかし逆の問題は考えられてこなかった。つまり接合積のトレースからもとの C スター環上の KMS 状態が作れるかという問題。正確にはつぎのように考える。接合積上の (稠密に定義された下半連続な) トレースのなす錐を、もとの C スター環上の KMS 状態の構造を使って書きあらわすこと。

これは流れに対して何の条件もなしには望みえないことが明らかになる。そのために一つの (十分) 条件を仮定した。この条件は空間的になんらかの一様性をもつ現実の状況では成り立つことが容易に確かめられる。その条件のもとで上述のトレースの錐を、ある空間上の極大測度のことばで記述した。(その空間とはすなわちすべての KMS 状態の空間である。) これによって、接合積のトレースの錐がもとの流れの平衡状態に関する情報を完全に含んでいることが明らかになった。また稠密には定義されていないトレースは、必然的にその定義域 (の閉包) としてのイデアルの情報も含む。つまりイデアルの問題とトレースの問題は独立ではありえない。これは物理的には KMS 状態の温度 0 への極限が基底状態を定義することに対応している。しかし、どういうイデアルがトレースの定義域として実現できるかはまだ明らかでなく今後の課題はなお多い。これはまた基底状態 (と天井状態) だけで接合積の原始イデアルがすべて決定できるかという問題と絡んでいる。

一番簡単と思われる流れは UHF 流れである。(数学的には行列環上の流れの無限テンソル積として得られる流れ。) これはいわば 0 次元空間の流れで、互いに相互作用することのない粒子無限個の集まっただけの系である。これと 1 次元系との違いを明らかにするというのが目的であるが、そのためにまず UHF 流れの解析をしている。たとえば普遍

な UHF 流れの構成法を与え、その特徴づけを与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

①, A. Kishimoto, C^* -crossed products by R, II, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 45 (2009), 451-473. 査読有

② O. Bratteli, A. Kishimoto, D.W. Robinson, Approximately inner derivations, Math. Scand. 103 (2008), 141-160. 査読有

[学会発表] (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岸本 晶孝 (KISHIMOTO AKITAKA)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00128597

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし