

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2010

課題番号：20540201

研究課題名（和文） 正準的リーマン計量を持つ単体的複体上の幾何解析

研究課題名（英文） Canonical Riemannian metrics on simplicial complexes

研究代表者

山田 澄生（YAMADA SUMIO）

東北大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：90396416

研究成果の概要（和文）：

単体的複体の単体同士が交わる境界においての幾何学的構造が、いくつかの全く違った文脈に於いて大域的幾何構造を決定するに重要な役割を果たしていることを検証することに成功した。特にタイヒミュラー空間のペイユ・ピーターソン幾何の内包する高次の非線形性、特異性をもつ面積極小集合の特異点集合である自由境界の共形幾何学的特長付け、そしてアインシュタイン多様体内の事象の地平線の空間的断面を介した位数2の対称性、それぞれの場合に境界付近で定義された正準的幾何構造の持つ意味を定式化した。

研究成果の概要（英文）：

We have demonstrated the importance of boundary geometry of various Riemannian metrics when the boundary components act as facets where simplices meet within a simplicial complex, in terms of its effect on the global geometric structures of the simplicial complex. This has been observed and investigated in the contexts of Weil-Petersson geometry of Teichmüller spaces, singular minimal surface theory arising in Geometric Measure Theory, and the geometry of event horizons within Einstein manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：調和写像、リーマン面、モジュライ空間、コクセター複体、極小曲面、一般相対性理論、実解析性

1. 研究開始当初の背景

標準的単体の集合である単体的複体の概念を、一般化された単体構造を考えることによってより幅広い幾何学的構造の理解を試みた。単体として境界付リーマン多様体を選び、凸幾何学、全測地的部分多様体、等長変換と

しての鏡映等の幾何学的概念をこれらの一般化された空間で適用し、同時に単体的複体の幾何学的実現としてこれまで使われてきたユークリッド計量の代わりに与えられた文脈ごとにいくつかの正準的な計量を導入することで、新たな幾何学的問題意識の構成

を図った。

2. 研究の目的

(1) 普遍的タイヒミュラー空間という全てのタイヒミュラー空間を内包する空間に新しい座標系を誘導する方法としてコクセター複体の導入を意図とした。この手法においてはリーマン面の種数は変数として捉えることが前提であり、種数の変化を幾何学的に追うことの苦手な既存のリーマン面の理論を補完する。

(2) ユークリッド空間内のハウスドルフ測度を最小にする (M, ε, δ) 極小集合の自由境界の正則性の新しい証明に関しては、各極小曲面の誘導計量が決定する共形構造の特徴付けをいかにして達成するか、別の言い方をすれば、共形構造の空間であるタイヒミュラー空間の定式化を目標とした

(3) 3次元多様体上でスカラー曲率が非負であるという比較的弱い条件が、いかにして漸近的平坦なエンドの形状と内部に存在する極小曲面の形状を結び付けるのかを定式化することを目標とした。これは漸近的ディリクレ境界条件とコンパクト領域での自由境界条件をみたく山辺の方程式の解の挙動を理解することを目指すことに他ならない。

3. 研究の方法

(1) タイヒミュラー空間を双曲計量によって助変数表示することで、空間の境界近傍での漸近的挙動の制御を行った。その際境界の連結成分が全測地線的に完備化されたタイヒミュラー空間内に埋めこまれていることに着目し境界を介した位数2の群作用を構成することでコクセター理論を導入した。

(2) (M, ε, δ) 極小集合を単体的複体からの調和写像の像として実現することで、ユークリッド計量から誘導された計量の写像による引き戻し計量の解析を行った。この際写像のエネルギーを最小化するときに、各単体上に定義された写像のエネルギーに重みを付けることで特異点集合である自由境界上で成り立つ釣り合いを実現した。

(3) H. Brayによって導入されたリーマン計量の共形変換流の理解を介して、漸近的平坦な3次元多様体のモジュライ空間上での変形理論の定式化を試みた。ここで共形変換流に沿ったアインシュタイン方程式の厳密解の挙動を精査することで普遍量の時間単調性の理論的必然性を解明した。

4. 研究成果

(1) タイヒミュラー空間を非線形かつsingularな単体として捉えることにより構成されたコクセター複体は、60年代に Tits, Serre, Bass 等によって定式化されたリー群および対称空間のコクセター理論をタイヒミュラー空間論に自然に導入することを可能にした。とくこの文脈に於いて曲面の写像類群をワイル群として解釈する試みは、タイヒミュラー空間の大域的幾何学構造の理解に新しい視点を提供するであろうと期待される。

(2) 単体的複体からの調和写像を用いることで局所ユークリッド的でない面積極小/最小集合の存在および幾何学的性質の解明を可能にした。その際、古典的によく理解されているリーマン面の理論のアナロジーとして特異性をもつ等温座標系の理論を確立した。これはポアンカレの一意化定理の一般化として解釈され、 (M, ε, δ) 極小集合を一般化された複素正則関数と同一視する対応の定式化に成功した。このことは面積最小化の変分原理に実解析性が自然に現れる現象として注目に値する。

(3) 3次元漸近平坦な多様体の漸近普遍量と有界領域内の幾何学の関連性を宇宙検閲官仮説との整合性を念頭に解析した。とくに時間対象なコーシー曲面としての3次元多様体に存在する事象の地平線のトポロジーと漸近的普遍量であるADM質量の関係に、非自明な非線形性が内在していることをいくつかの具体例を構成することで明らかにした。これらの例はアインシュタイン方程式の解の時間発展に従ってコーシー曲面のトポロジーがどう変化していくかをモデリングするにあたって重要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ①. Chikako Mese, 山田澄生, Local uniformization and free boundary regularity of minimal singular surfaces, Journal of Geometric Analysis, 査読有, 2011年, 印刷中 (DOI: 10.1007/s12220-010-9165-9, 24 pages).
- ②. Sergio Dain, Gilbert Weinstein, 山田澄生, A counterexample to a Penrose inequality conjectured by Gibbons, Classical and Quantum Gravity, 査読

- 有, 28 卷, 2011 年, 085015.
- ③. 山田澄生, Some aspects of Weil-Petersson geometry of Teichmüller spaces, Surveys in Geometric Analysis and Relativity Advanced Lectures in Mathematics 20 卷, 査読有 2011 年, 189-203.
 - ④. 山田澄生, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex and its finite rank property. Geometriae Dedicata, 査読有, 145 卷, 2010 年, 43-63.
 - ⑤. 山田澄生, On singular Plateau problem. Advanced Lectures in Mathematics 11 卷, 査読有, 2010 年, 217-229.
 - ⑥. 山田澄生, On Weil-Petersson symmetry of moduli spaces of Riemann surfaces, Proceedings of the 16th OCU International Academic Symposium 2008, OCAMI Studies, 査読有, 3 卷, 2009 年, 67-78.
 - ⑦. 大橋勢樹, 白水徹也, 山田澄生, Riemannian Penrose inequality and a virtual gravitational collapse, Physical Review D, 査読有, 80 卷, 2009 年, 047501.1-047501.4.
 - ⑧. 山田澄生, Isothermal coordinates on singular minimal surfaces, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1628 卷, 2008 年, 109-115.

[学会発表] (計 13 件)

- ① 山田澄生, Local and global uniformizations of minimal singular surfaces.” Workshop on Geometric Analysis, Sendai 2011, 2011 年 2 月 21 日, 東北大学.
- ② 山田澄生, Uniformization of minimal singular surfaces, Workshop Teichmüller Theory, 2010 年 12 月 1 日, オーベルボルファッハ数学研究所, ドイツ.
- ③ 山田澄生, Riemannian Penrose inequality revisited, the 19th International Conference on General Relativity and Gravitation (GR19), 2010 年 7 月 4 日, メキシコシティ, メキシコ.
- ④ 山田澄生, タイヒミューラー空間を単体とするコクセター複体について, 研究集会「多様体上の種々の幾何構造とその応用」, 2010 年 3 月 18 日, 名城大学.
- ⑤ 山田澄生, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex, 2010 年 3 月 談話会, アラバマ州立大学, アメリカ.
- ⑥ 山田澄生, Teichmüller-Coxeter

- complex and New Weil-Petersson symmetries, リーマン面・不連続群論研究集会, 2010 年 1 月 11 日, 名古屋大学.
- ⑦ 山田澄生, ペンローズ不等式からの時空の構成法, 一般講演, 日本数学会年会, 2009 年 9 月 19 日, 大阪大学.
 - ⑧ 山田澄生, On a new symmetric structure of moduli spaces of Riemann surfaces, The 1st PRIMA Congress, 2009 年 7 月 5 日, ニューサウスウェールズ大学, オーストラリア.
 - ⑨ 山田澄生, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex, Fusion of Integrable Systems and Geometry, 2009 年 4 月 15 日, 東北大学.
 - ⑩ Sumio Yamada, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex, 第 16 回大阪市立大学国際学術シンポジウム「リーマン面, 調和写像と可視化」, 2008 年 12 月 17 日, 大阪.
 - ⑪ Sumio Yamada, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex, **Perspectives in Geometric Analysis**, 2008 年 10 月 30 日, 北京, 中国.
 - ⑫ 山田澄生, Weil-Petersson geometry of Teichmüller-Coxeter complex, Conformal Geometry: invariant theory and the variational method, 2008 年 7 月 3 日, ロスコフ, フランス.
 - ⑬ 山田澄生, A Variational Formulation for Free Boundary Regularity of singular minimal surfaces, 変分法とその周辺, 2008 年 6 月 25 日, 京都.

[その他]

- ① 山田澄生, 春の学校「アインシュタイン方程式の世界観」東北大学グローバル COE 講義録, 2009 年, 39 pages. (<http://www.math.tohoku.ac.jp/meetings/springschool/LN-2009/index.html>)
- ② 山田澄生, 時計仕掛けの地図 - ポアンカレと相対性理論 -, 数理科学 10 特集ポアンカレ, 2008 年, 44-50.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 澄生 (YAMADA SUMIO)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90396416

(2) 研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

小櫃 邦夫 (OBITSU KUNIO)
鹿児島大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：00325763

木田 良才 (KIDA YOSHIKATA)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90451517

白水 徹也 (SHIROMIZU TETSUYA)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：10282716