

## 自己評価報告書

平成23年 4月28日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2011

課題番号：20540203

研究課題名(和文) マクドナルド多項式と多変数超幾何級数の研究と格子模型への応用

研究課題名(英文) Macdonald polynomials, multivariable hypergeometric series and their application to lattice models

研究代表者

白石潤一 (SHIRAIISHI JUNICHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：20272536

研究分野：可解格子模型、数理物理学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系

## 1. 研究計画の概要

A型のMacdonald多項式についてはPieri公式がよくわかっており、それによって明示的公式が導かれている。しかし、A型以外のMacdonald多項式やKoornwinder多項式に対しては、Pieri公式の研究が十分には進められていないのが現状である。本研究の目的は、Macdonald多項式、Koornwinder多項式などの多変数の直交多項式の明示的公式を見いだすこと、量子群などの何らかの代数的構造を軸にして全体像を理解すること、及び、それらの知見を可解格子模型への応用することである。また、楕円関数を用いて定義されるRuijsenaars系に関する理解を進めたい。

## 2. 研究の進捗状況

私が調べている代数的構造とは、Macdonald差分作用素の成す可換代数とそれに付随する核関数関係式、Ding-Ioharaの量子代数(Feigin、橋爪、星野、白石、柳田)、変形W代数、及び、Feigin-Odesskii代数等を指す。これらの代数には、 $q$ と $t$ との二つの変形パラメータが入っているのであるが、それがMacdonald多項式などに含まれるパラメータと自然に同一視される。

BC型のルート系に関する差分作用素であるKoornwinderの差分作用素に関して、コーシー型の核関数関係式を見つけた(野海、小森、白石)。これを応用して、Koornwinder多項式の明示的公式の例を作ることができる。

Ding-Ioharaの量子代数の表現論の全貌を見定めることはまだできていないが、既に、非常に興味深い振る舞いをする表現のクラスが見つか

ってきている。とりわけ、フォック表現、及び、そのテンソル積表現は基本的である。昨年度までの研究成果によって、A型の変形W代数の相関関数は、対称多項式環とFeigin-Odesskii代数のテンソル積に値をとること、Macdonald多項式のタブロー和公式と密接に関係することがわかった(Feigin、星野、柴原、白石、柳田)。

A型以外の場合、Ding-Iohara代数のようないま代数構造はまだよくわかっていない。しかし、変形W代数の表現を調べると、Macdonald多項式に関する何らかの構造が機能しているように思われる。即ち、C型の変形W代数の生成元の行列要素から、C型のMacdonald多項式の明示的公式の例を予想することができた。その公式は超幾何級数の変換公式によって証明される(星野、柴原、白石)。

Ding-Iohara代数の古典極限は、ある古典可積分系を定める。この可積分方程式は、離散Laplacianを持つ周期的なintermediate long wave方程式となる(土谷、白石)。土谷と私はこの系が2D戸田方程式にある簡約条件を与えたものになることを示し、 $n$ ソリトン階を構成した。そして、 $n$ ソリトン階に対して運動の積分の値を計算し、それがMacdonald作用素の固有値の構造と非常に似ていることを示した。

## 3. 現在までの達成度

2 おおむね順調に進展している。

上述の通り、Ding-Iohara代数や変形W代数の表現論を通してMacdonald多項式やその周辺の超幾何級数の構造を研究してきた。と

りわけ、Ding-Iohara 代数との関わりの発見は本研究において最も重要なことと考えている。A 型の Macdonald 多項式の理論をより広い設定（高いレベルの表現）の中で眺める視点は新しいものである。

A 型以外の Macdonald 多項式の理解も核関数の理解により大きく進んだ部分がある。そして、C 型の変形 W 代数による発見法的な理解ももたらされている。

ここまでの進捗状況は順調であり、達成度は高いと考える。2011 年度の研究において、格子模型への応用も目指すつもりである。

#### 4. 今後の研究の推進方策

現在、AGT 予想 (Alday, Gaiotto, Tachikawa) と呼ばれる現象の類似と Ding-Iohara 代数について研究を進めている。AGT 予想の意味する所は、Conformal field theory の相関関数の Nekrasov 分配関数による組合わせたな方法で記述であるが、その  $q$  類似が Ding-Iohara 代数で記述されると予想する。Conformal field theory の格子類似として知られている可解格子模型の相関関数の構造をこの観点から調べる。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

(1) J. Shiraishi, Y. Tutiya,  
Periodic Benjamin-Ono equation with discrete Laplacian and 2D-Toda Hierarchy,  
In New Trends in Quantum Integrable Systems, Proceeding of the Infinite Analysis 09, Editors B. Feigin, M. Jimbo and M. Okado, pp. 357-371, World Scientific (2010)

(2) J. Shiraishi, Y. Tutiya,  
Periodic ILW equation with discrete Laplacian,  
J. Phys. A 42 (2009), no. 40, 404018, 15 pp.

(3) B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi and S. Yanagida,  
A commutative algebra on degenerate  $CP^1$  and Macdonald polynomials,  
J. Math. Phys. 50 (2009), no. 9, 095215, 42 pp.

(4) Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi,  
Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications.  
SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 5 (2009), Paper 054, 40 pp.

[学会発表] (計 4 件)

(1) Macdonald polynomials and quantum algebras,  
15th Itzykson meeting, New trends in quantum integrability,  
IPhT Saclay, France, June 23, 2010.

(2) Hirota-Miwa equations and Macdonald operators,  
Infinite Analysis 09, New Trends in Quantum Integrable Systems,  
Department of Mathematics Kyoto University, Japan,  
July 30, 2009.

(3) Macdonald 多項式と可積分系,  
日本数学会秋期総合分科会, 特別講演, 東京工業大学,  
2008 年 9 月 25 日.

(4) Macdonald polynomials and integrals of motion,  
Workshop "Integrable quantum systems and solvable statistical mechanical models",  
CRM Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, Canada,  
2008 年 7 月 4 日.