

## 自己評価報告書

平成 23 年 4 月 21 日現在

機関番号：13301  
研究種目：基盤研究（C）  
研究期間：2008～2011  
課題番号：20540204  
研究課題名（和文） シュレーディンガー作用素のスペクトル解析に基づく超格子構造の解析  
研究課題名（英文） Analysis on superlattice structure using spectral analysis of Schroedinger operator  
研究代表者  
小栗 修（OGURISU OSAMU）  
金沢大学・数物科学系・准教授  
研究者番号：80301191

研究分野：関数方程式論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：超格子、シュレーディンガー作用素、点相互作用

## 1. 研究計画の概要

超格子構造とは江崎玲於奈の提唱による異種半導体の薄膜を積層させて製造される人造の構造物で、量子効果を用いた半導体デバイスの一種である。

本研究の目的は、この超格子を数学的対象ととらえて、その特性を数学的に解析することにある。この超格子の解析は数学的には階段状のポテンシャル内における電子の運動の量子力学モデルの解析に他ならない。周知のとおり、電子の数学モデルであるシュレーディンガー方程式については膨大な研究成果が数学・物理学にすでにあるが、残念ながら、それらは工学におけるデバイス設計での要求を満たしていない。そこで、その工学的な要求を横目に睨みながら、超格子を出発点として新しい解析手法を開発し分析を行うことで、作用素論・関数方程式論を展開しようというのが本研究である。

## 2. 研究の進捗状況

(1) 超格子の問題は S. Albeverio たちの研究で有名なシュレーディンガー作用素  $L$  の点相互作用のモデルとの関係が深いので、そのスペクトル構造を調べることは有用である。 $L$  の連続スペクトルは  $[0, \infty)$  で、その他に点相互作用の効果により負の固有値を持つ。特に点相互作用の強度が全て負の場合には、Albeverio と L. Nizhnik の研究により負の固有値の個数と点ポテンシャルの個数が一致する必要十分条件が見い出されている(2005年)が、相互作用の強度が全て負でない場合については未知であった。研究代表者は、

まず固有値の個数の上限が負の強度をもつ点相互作用の個数で抑えられ、また点相互作用の強度とその配置で固有値の個数の上限が評価できることを示した。その結果は 2008 年の *Letters in Mathematical Physics* に掲載された。

(2) さらに、Albeverio-Nizhnik の 2005 年の結果である必要十分条件の大前提であった「すべての点相互作用の強度が負である」という条件を除去した場合においても、固有値の個数が負の強度をもつ点相互作用の個数に一致するための必要十分条件を得た。その結果は 2010 年の *Methods of Functional Analysis and Topology* に掲載された。

(3) また、空間 2 次元や 3 次元の場合には Albeverio-Nizhnik の必要十分条件のような結果はまったく知られていなかったが、1 次元で開発した手法を拡張することにより、多次元においても固有値の個数を厳密に計算する手法を構成した。その結果は 2010 年の *Methods of Functional Analysis and Topology* に掲載された。

## 3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

(理由)

この超格子を数学的対象ととらえてその特性を数学的に解析することがこの研究の目的であり、その数学的に重要な例である点相互作用のモデルについて、期待していた程

度のよい結果と期待以上のものとして高次元の場合に類似の結果を得たことがある。1次元モデルの場合に **best possible** な上限の評価を得られ、また **Albeverio-Nizhnik** の既知の結果を一般の場合に拡張できた。また、**Albeverio-Nizhnik** の証明を見る限りでは、その結果は1次元に固有のものに思われていたものを、高次元に拡張できたことは期待以上であった。

#### 4. 今後の研究の推進方策

点相互作用のモデルにおいて固有値の個数の問題はある程度の解決を得たが、その固有値の配置については全く知られていないので、それが大きな課題として残っている。また、点相互作用は従来の超格子構造（階段上のポテンシャル）の極限であることから、点相互作用の成果を超格子の場合に引き戻すことを進めていきたい。さらに、離散グラフ上のラプラシアンについても、点相互作用の成果を応用できることが判っており、1次元の場合についてはすでに成果があるので、一般のグラフの場合に拡張していく予定である。

#### 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

1. Osamu Oguirsu, On the Number of Negative Eigenvalues of a Multi-dimensional Schroedinger Operator with Point Interactions, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2010, 16, p. 383-392. 査読有.

2. Osamu Oguirsu, On the Number of Negative Eigenvalues of a Schroedinger Operator with  $\delta$  Interactions, *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2010, 16, p. 42-50. 査読有.

3. Osamu Oguirsu, On the Number of Negative Eigenvalues of a Schroedinger Operator with Point Interactions, *Letters in Mathematical Physics*, 2008, 85, (2-3), p. 1573-530. 査読有.

[学会発表] (計5件)

1. 小栗栖修, 樋口雄介, 野村祐司; 有限個

のポテンシャルを伴う離散ラプラシアンの固有値 III, 2010年12月15日, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学(滋賀県).

2. 小栗栖修, 樋口雄介, 松本知徳; 有限個のポテンシャルを伴う離散ラプラシアンの固有値 II, 2009年12月16日, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学(滋賀県).

3. 小栗栖修, 樋口雄介, 松本知徳; 有限個のポテンシャルを伴う離散ラプラシアンの固有値, 2008年12月15日, 応用数学合同研究集会, 龍谷大学(滋賀県).

4. 浅倉邦彦, 小栗栖修, 真田博文, 鈴木正清; 散乱による電子波減衰を考慮した変調超格子の透過特性, 2009年3月17日, 電子情報通信学会総合大会, 愛媛大学.

5. 浅倉邦彦, 小栗栖修, 真田博文, 鈴木正清; 回路理論の応用による変調超格子の準通過域情報の抽出, 2009年3月3日, 電子情報通信学会 回路とシステム研究会, 長良川国際会議場(岐阜県).