様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 23 年　4 月 25 日現在

機関番号：14101
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2008～2010
課題番号：20540207
研究課題名（和文）　２変数退化ガルニエ系の代数解と，代数解による代数構造の解析
研究課題名（英文）　Analysis of an algebraic structure of a degenerate Garnier system from a viewpoint of algebraic solutions.

研究代表者
川向　洋之　（Kawamuko Hiroyuki）
三重大学・教育学部・准教授
研究者番号：00303719

研究成果の概要（和文）：
(1) 木村氏の定義した退化ガルニエ系 G(3,1,1) と，研究代表者の定義した退化ガルニエ系 G(5/2,1,1) を考察し，G(3,1,1) と G(5/2,1,1) の有理解をすべて決定した．

(2) 木村氏の定義した退化ガルニエ系 G(3,2) の代数解をすべて決定した．

(3) (1),(2) の結果を用いて，退化ガルニエ系 G(5/2,1,1)，G(3,1,1)，G(3,2) が双有理な変換で写りあわないことを示した．

(4) リーマン球面上で３つの確定特異点を持つ３階のフックス型方程式を考察し，このシュレジンガー変換が差分の VI 型パンルヴェ方程式になることを示した．また同様の考察を行えば差分ガルニエ系を構成できることを示した．

研究成果の概要（英文）：
(1) We consider degenerate Garnier systems G(3,1,1) (which is defined by H. Kimura) and G(5/2,1,1) (which is defined by H. Kawamuko), and find all rational solutions of each equation.

(2) We consider degenerate Garnier system G(3,2) (which is defined by H. Kimura), and find all algebraic solutions of G(3,2).

(3) By using the results (1) and (2), we show that there is no birational transformation between these systems.

(4) We consider a third order Fuchsian differential equation which has three regular singular points on Riemann sphere, and show that the Schlesinger transformation is equivalent to a difference VI Painlev¥'e equation. Moreover, we can define a difference Garnier system in a similar way.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	600,000	180,000	780,000
2010 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：可積分系
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：ガルニエ系，有理解，代数解，差分パンルヴェ方程式

１．研究開始当初の背景

(1) ４の分割に応じた２階の線形常微分方程式のモノドロミー保存変形を考えると，MPD 方程式（＝モノドロミー保存変形により得られる非線形方程式）として II 型から VI 型までのパンルヴェ方程式が得られる．熊本大学の木村弘信氏はこのことを踏まえ，５の分割に応じた２階の線形常微分方程式を考察し，そのモノドロミー保存変形から（パンルヴェ方程式を２変数に拡張したものに相当する）７個の非線形方程式

G(1,1,1,1,1)，G(2,1,1,1)，G(2,2,1)，
G(3,1,1)，G(3,2)，G(4,1)，G(5)

を導いた．(以下，この方程式を木村氏のガルニエ系と呼ぶ)．また，研究代表者は木村氏の考察した線形方程式を，ポアンカレ・ランクが半整数になるように退化させ，そこから７個の非線形方程式

G(3/2,1,1,1)，G(3/2,2,1)，G(3/2,3/2,1)，
G(5/2,1,1)，G(5/2,2)，G(5/2,3/2)，
G(7/2,1)

を導いた．(以下，これを半整数型ガルニエ系と呼ぶ)．一方，大坂大学の大山陽介氏と奥村昌司氏は，４の分割に応じた２階の線形常微分方程式を，ポアンカレ・ランクが半整数になるように退化させ，

(3/2,1,1)，(3/2,2)，(3/2,3/2)，(5/2,1)

型の MPD 方程式導き，これらとパンルヴェ方程式との関係を調べ，(3/2,1,1) 型の MPD 方程式は IV 型パンルヴェ方程式，(5/2,1) は II 型パンルヴェ方程式と同値になることを示した．この研究は，木村氏のガルニエ系と研究代表者の半整数型ガルニエ系との間に何らかの関係があるかもしれないことを示唆するものであったが，その当時，両者の関係は明らかになっていない段階であった．

なお，両者の関係を調べる上で重要となるガルニエ系の代数解の研究は，木村氏のガルニエ系 G(4,1) の場合に，研究代表者によって行われており，その結果，G(4,1) の代数解はすべて有理解で，それはリッカチ解の特殊ケースとして得られることなどが示されていた．

(2) 坂井秀隆氏により，曲面論の観点からさまざまな対称性を持つ非線形差分方程式と，非線形常微分方程式が得られていた．特にこの中の D_6 型と呼ばれる対称性を持った非線形差分方程式は，適当な極限操作で VI 型パンルヴェ方程式になることが分かっていた．しかし，この差分方程式と，差分方程式を"広い意味"で MPD 方程式とする線形方程式との関係を与える具体的な計算はまだなされていなかった．

なお，この研究を行うときに鍵となる「"退化"と"変形パラメータの個数の変化"の関係」を指摘した文献は無かったようである．

２．研究の目的

(1) １９世紀の解析学では「微分方程式で定義される新しい特殊函数を数多く見つけよ」と言う問題意識があった．そして「モノドロミー保存変形」はこの問題に対する非常に強力な道具となっていた．ところで，一般に異なる線形方程式のモノドロミー保存変形を考えても，そこから得られる非線形方程式（MPD 方程式）が異なるとは限らない．(たとえば大山氏，奥村氏の結果を見てわかるように，(4) 型の線形方程式の MPD 方程式と (5/2,1) 型の線形方程式の MPD 方程式は（線形方程式が異なるにもかかわらず）一致する)．よって木村氏の導いたガルニエ系と，研究代表者が導いた半整数型ガルニエ系が異なるかどうかは自明でない．故に「新しい特殊函数を見つける」観点からも，これらの関係を調べる必要がある．本研究では退化ガルニエ系 G(5/2,1,1)，G(3,1,1)，G(3,2) の関係について調べた．

(2) MPD 方程式の性質を調べる場合，それを与える線形方程式が分かっていると有用である．(例えばシュレジンガー変換の構成や，WKB 解の大域的挙動を調べる場合など，様々な場面で MPD 方程式を与える線形方程式が有用な道具となっている)．従って坂井氏の D_6 型の差分方程式に対応する線形方程式を具体的に記述し，そこから D_6 型の差分方程式を導くことは，この方程式の解析に重要な役割を果たすと思われる．本研究では D_6 型の差分方程式に対応する線形方程式を考察し，そのシュレジンガー変換や退化極限などを調べた．

３．研究の方法

(1) 複数の非線形の方程式が与えられたとき，これらが適当な変換で写りあうかどうかを見極めるのは難しい．そもそもどの程度までの変換を許すのかも考慮する必要がある．しかし木村氏のガルニエ系と研究代表者の半整数ガルニエ系はパンルヴェ性（「特異点

の位置が初期条件に依存して決まるものは極しかない」という性質）を持つため，これらが異なるか否かを調べるには，双有理な変換で写りあうかどうかを調べるのが妥当であろう．このことに基づき，本研究では木村氏のガルニエ系と研究者の半整数ガルニエ系の代数解を調べた．これらの分布が分かれば両者が双有理な変換で写るか否かを調べることが可能である．

なお，本研究では G(5/2,1,1)，G(3,1,1)，G(3,2) の代数解を次の手順で調べた．

① G(5/2,1,1)，G(3,1,1)，G(3,2) の解は片方の変数に関して有理的になる性質があるので，この変数に関して解を適当な点の周りでハルトークス級数に展開する．

② ハルトークス級数の初項（これはもう一方の変数の関数になる）の満たす常微分方程式を導く．

③ パンルヴェのときと同様に，極の位数と留数を調べ，留数定理を用いて代数解・有理解を調べる．

(2) 線形常微分方程式がアクセサリーパラメータを十分多く含んでいる場合，そのモノドロミー保存変形を考えることができる．そしてその線形方程式を退化させることで，新たな方程式と，新たなモノドロミー保存変形を考えることができる．ところで，研究代表者と，琉球大学の眞野智行は，線形方程式を退化させたとき，２階の場合だと「変形パラメータ」と呼ばれるものの個数が不変だが，３階以上ではそうならないことに気付いた．そしてこのことを利用すれば，既知の連続変数をもつ非線形方程式に退化するような差分方程式の構成ができることに気付いた．本研究の研究成果の (2) はこの方法を用いてなされた．

４．研究成果

(1) 熊本大学の木村弘信氏が定義した（パンルヴェ方程式を２変数に拡張したものに相当する）７つの方程式

G(1,1,1,1,1)，G(2,1,1,1)，G(2,2,1)，G(3,1,1)，G(3,2)，G(4,1)，G(5)

と，研究代表者が定義した半整数型ガルニエ系

G(3/2,1,1,1)，G(3/2,2,1)，G(3/2,3/2,1)，G(5/2,1,1)，G(5/2,2)，G(5/2,3/2)，G(7/2,1)

との関係を調べるため，木村氏の定義した退化ガルニエ系 G(3,1,1) と研究代表者が定義した退化ガルニエ系 G(5/2,1,1) の有理解，および，木村氏の退化ガルニエ系 G(3,2) の代数解を調べ，これらが双有理な変換で写りあうかどうかを調べた．この結果次のことが分かった．

① G(5/2,1,1) の代数解が存在するための必要十分条件は，G(5/2,1,1) のパラメータ κ_0 と κ_1 が「$\kappa_0+(3/4)$ は整数」，「$\kappa_1+(1/4)$ は整数」のいずれかの条件を満たすことである．

② G(5/2,1,1) のパラメータ κ_0 と κ_1 が代数解を持つための条件（$\kappa_0+(3/4)$，もしくは $\kappa_1+(1/4)$ が整数）を満たしたとき，G(5/2,1,1) の代数解は有理関数であり，しかもパラメータを一つ固定したとき，G(5/2,1,1) に含まれる代数解（有理解）は２種類存在する．

③ G(3,2) の代数解が存在するための必要十分条件は，G(3,2) のパラメータ κ_0 と κ_∞ が「$\kappa_0/2$ と $\kappa_\infty+(1/2)$ のいずれもが整数」と言う条件を満たすことである．

④ G(3,2) のパラメータ κ_0 と κ_∞ が代数解を持つための条件（$\kappa_0/2$ と $\kappa_\infty+(1/2)$ のいずれもが整数）を満たしたとき，G(3,2) の代数解は１種類しかない．

⑤ G(3,1,1) のパラメタ θ_0，θ_1，ρ が「$\theta_0=-(1/2)$，$\rho=-1+2\theta_1$」，「$\theta_1=-(1/2)$，$\rho=-1+2\theta_0$」，「$\theta_0=\theta_1=\rho=0$」のいずれかを満たすとき，G(3,1,1) は代数解を持つ．またこの代数解はパラメータを固定するとただ一つである．さらに G(3,1,1) の他の代数解は，ここで得られた解をシュレジンガー変換することで得られる．

⑥ ⑤で得られた解は G(3,1,1) のリッカチ解の特殊ケースとして得られる．

⑦ G(3,1,1) は IV 型パンルヴェ方程式を特殊な場合として含んでいる．また G(3,1,1) に含まれる IV 型パンルヴェ方程式の岡本多項式で表される解からは，G(3,1,1) の有理解が得られない．

⑧ 代数解の構造から，G(3,2)，G(3,1,1)，G(5/2,1,1) は，双有理な変換で写りあわない．

(2) M. Mazzocco 氏により，「原点に確定特

異点，無限遠にポアンカレ・ランクが１である不確定特異点を持つ３階の線形常微分方程式の モノドロミー保存変形から VI 型パンルヴェ方程式が得られる」ことが知られていた．また，研究代表者と琉球大学の眞野智行は「合流操作を考えた場合，従属変数に何らかの関数を掛ける自由度や，変数変換の自由度によって ２階の線形常微分方程式では変形パラメータの個数は不変となるが，３階以上の場合ではそのようなことは起きない」と言うことに気付いた．そこで，変形パラメータを持たない方程式で，かつ，退化極限で M. Mazzocco 氏の考察した線形常微分方程式に帰着するもの（より具体的に言うと，原点と無限遠点，および 1 で確定特異点を持つ３階のフックス型線形常微分方程式）を考察し，このシュレジンガー変換の退化極限として VI 型パンルヴェ方程式が得られること（従って，シュレジンガー変換が差分の VI 型パンルヴェ方程式になっていること）を示した．また，同様の操作で差分のガルニエ系も定義できることを示した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① 川向 洋之 On the Garnier System of Half-Integer Type in Two Variables , FUNKCIALAJ EKVACIOJ, 査読有, 52 巻, 2009, 181 - 201.

〔学会発表〕（計２件）

① 川向洋之，G(3,1,1) 型ガルニエ系の有理解について，日本数学会（慶應義塾大学），2010 年 3 月 27 日

② 川向洋之，高階線形微分方程式の合流操作とモノドロミ保存変形の退化，日本数学会（名古屋大学），2010 年 9 月 24 日

６．研究組織
(1)研究代表者
川向 洋之（Kawamuko Hiroyuki）
三重大学・教育学部・准教授
研究者番号：00303719

(2)研究分担者
（ ）

研究者番号：

(3)連携研究者
（ ）

研究者番号：