様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年　５月　２７日現在

機関番号：１４７０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：２００８～２０１０
課題番号：２０５４０２１１
研究課題名（和文）　非線形双曲型方程式系の外部問題に対する大域解の存在条件の解明

研究課題名（英文）　Studies on the sufficient conditions for the global existence of solutions to the exterior problems for nonlinear hyperbolic equations

研究代表者
片山　聡一郎（KATAYAMA SOICHIRO）
和歌山大学・教育学部・教授
研究者番号：７０２８３９４２

研究成果の概要（和文）：　線形波動方程式に対する外部問題を考え，その漸近形への収束の速さを明らかにした．応用として半線形波動方程式の外部問題の解の存在時間の下限の精密な評価を得た．また多重伝播速度を持つ波動方程式系の零条件の下での大域解の漸近挙動を調べた．関連して，全空間での初期値問題に関する研究も行い，非線形波動方程式系，クライン-ゴルドン方程式系やそれらの連立系などに関して，大域解の存在条件や漸近挙動などを明らかにした．

研究成果の概要（英文）： We consider the exterior problem for the linear wave equations, and obtained the convergence rate of the solution to its asymptoics. As an application, we also obtained the precise lower bound estimate of the lifespan of the solutions to the exterior problem for semilinear wave equations. We investigated the asymptotic behavior of global solutions to the systems of nonlinear wave equations with multiple propagation speeds. In connection to the exterior problem, we also study the Cauchy problem in the whole space for various kinds of nonlinear systems, such as systems of wave or Klein-Gordon equations and coupled systems of these equations, and investigated the condition for the global existence of solutions and their asymptotic behavior.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	600,000	180,000	780,000
２００９年度	500,000	150,000	650,000
２０１０年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：非線形偏微分方程式
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形波動方程式，零条件，大域解，外部問題，クライン-ゴルドン方程式

１．研究開始当初の背景

(1) 非線形波動方程式(系)の小さな初期値に対する(全空間における)初期値問題の研究は 80 年代以降，活発に行われてきた．特に Klainerman により導入されたベクトル場の方法により，単独の伝播速度を持つ場合の研究は大きく発展し，3 次元もしくは 2 次元空間において大域解存在のための条件(零条件；null condition)が得られた．さらに成分毎に伝播速度が異なるような波動方程式系の研究もここ 10 年で大きく発展し，そのような場合への零条件の様々な拡張が得られた．

(2) 非線形波動方程式系の全空間での初期

値問題に対して得られた結果を外部問題，すなわち有限な大きさをもつ障害物の外部領域における初期値境界値問題の場合へと拡張するという試みは比較的古くから行われており，障害物の形状や非線形項に課された条件などが徐々に弱められていった．ここでの問題点は障害物がある場合には，ベクトル場の方法があまりうまく適用できないことにある．特に大きな障害となるのがスケーリング作用素であり，これを用いる回数を制限する方向で議論が進展してきた．本申請者は久保英夫氏との共同研究において，John の古典的な観察に基づいて，スケーリング作用素を全く用いない手法を開発し，既存の零条件の下での大域解の存在結果の別証明を与えた．

(3) 非線形波動方程式系の初期値問題，特に単一の伝播速度しか持たない場合を考えるとき，長らく Klainerman による零条件が大域解存在の十分条件としてはもっとも弱い条件であった． しかし近年，Alinhac によって，より弱い十分条件が発見された．さらには零条件の下での状況とは異なり，大域解の中には漸近自由ではないものが含まれていることが申請者と久保英夫氏との共同研究で明らかになった．このことを踏まえると，Alinhac の条件の下ではどのような状況が実際に起こり得るのかを明らかにすることは重要な問題である．

２．研究の目的

本研究の目的は以下のようなものである．

(1) 非線形波動方程式(系)の小さな初期値に対する外部問題を考える．初期値問題に対しては既知の結果を外部問題へと拡張することを試みる．また大域解が得られた場合の解の漸近挙動に関しても調べる．

(2) 一般には初期値問題の方が使える道具が多く，扱いが容易であるから，初期値問題に対してさえ明らかになっていないことをいきなり外部問題に対して考察して結果を得るのは困難である．したがって，そのような性質は外部問題に対して考察する前に初期値問題に限定して考察するのは自然なことである． 以上の観点から，外部問題への拡張を視野に置きながらも，初期値問題に関する研究も行う．特に大域解の存在条件やその漸近挙動の解明に主眼を置く．

３．研究の方法

(1) 外部問題の研究においては，スケーリング作用素を用いないベクトル場の方法の更なる発展・改良を目指す.また非線形波動方程式を線形波動方程式の摂動と見る限り，線形波動方程式の外部問題に関する知見を得ることは極めて重要である．この点に関しては，散乱理論としてよく研究され精細な結果が知られている．ただしこれらの結果は必ずしも非線形への応用を主眼に得られているわけではないため，応用のためには若干の手直しが必要である．

(2) 非線形波動方程式系の主要部分を取り出すと，ある種の簡略化された方程式系が得られる．これは零条件とも関連し，Alinhac が得た大域解の存在条件とも大きく関係している．初期値問題の解の最大存在時間の下からの評価を得るのにこの簡略化された方程式系が実際に有効に用いられた．他方，大域解の存在に関しては，この簡略化された方程式系の使用は形式的な観察を行う場面に留まり，厳密な理論的考察には，ほとんど用いられていなかったようである．この簡略化された方程式系を大域解の存在証明や，解の漸近挙動の(厳密な)解析に有効に用いる．大雑把には，原点から遠方での挙動を記述するものであるから，初期値問題・外部問題を問わず有効な視点であると考えられる．

４．研究成果

(1) 非捕捉的な障害物の外部領域で線形波動方程式の外部問題を考えた．境界ではディリクレ境界条件を課す．空間の次元は 3 以上の奇数の場合を考える．初期値は滑らかで台が有界であると仮定する． この外部問題の解が，障害物がない全空間での波動方程式の解にエネルギー・ノルムの意味で時間とともに漸近することは，散乱理論で古典的に知られている(この全空間の波動方程式の解の初期値を散乱データという)．しかしこの漸近の速さは知られていなかった．また外部問題の初期値の台が有界であっても,散乱データの台は有界になるとは限らないが，遠方でどのように振舞うかも知られていなかった．

　非線形問題への応用を考えた場合，外部問題の解が，各点的にどのような漸近挙動をするのかを調べることが重要である．全空間の場合の解の各点的な漸近挙動は Friedlander による漸近形が知られている．上の結果の応用としてこのような漸近形も得られる．本研究で得た結果は以下の通りである:

① 外部問題の解は全空間での解に指数オーダーで漸近していく．また散乱データは遠方に向かうにつれて指数的に減衰する．

② 散乱データから決まる Friedlander の漸近形が，外部問題の解の各点的な漸近形を与える．また解と漸近形の誤差の評価も得た(非線形への応用上，この誤差の評価が重要である)．全空間の場合と異なり，光錐(light cone) から離れても，誤差は消えないが，指数的に減衰することを示した．

本研究は東北大学の久保英夫氏との共同研究である(査読雑誌に掲載済). 本研究の結果は次に述べる半線形波動方程式の外部問題に対する解の最大存在時間の研究において重要な役割を果たしている. さらに全空間の非線形波動方程式の研究においてFriedlander の漸近形が以前にも増して重要になってきたことを考えると, 本研究で得られた漸近形は今後の外部問題の研究において基礎的な役割を果たすことが期待される.

(2) 非捕捉的な障害物の外部領域で半線形波動方程式の初期値問題を考えた. 境界条件はディリクレ境界条件で考える. 3 次元空間で 2 次の非線形項を持つ場合を考える. この場合, 一般には時間大域解は存在しないことが知られているので, 解の最大存在時間がどのようになるのかを調べるのが主眼となる.

全空間の場合には, 初期値の大きさが小さくなったときの, 解の最大存在時間の下からの精密な評価が得られている. この評価は初期値の Friedlander の漸近形と, 非線形項の形によってのみ決まる定数を含んでいる. 非線形項が Klainerman の 零条件を満たすか, あるいは初期値が 0 の場合のみに, この定数は無限大となる. このことは, 零条件が成り立つか, あるいは初期値が 0 の場合に大域解が存在することと整合している.

この研究では, 上記の全空間の場合の結果の外部問題への自然な拡張を得た. 得られた結果は以下の通りである:

① 初期値から(線型方程式の)漸近データが決まるが, これに対する Friedlander の漸近形と非線形項から決まる定数を用いて解の最大存在時間の下からの評価を得ることができた.

② 特別な非線形項と初期値に対しては, 下からの評価と同じ形で, 解の最大存在時間の上からの評価を得ることが出来た. これにより①で得た評価は一般には改良できないことが分かる.

本研究は東北大学の久保英夫氏との共同研究である(投稿中). ①で得た結果があらゆる非線形項と初期値に対して最適なものであることが分かれば(つまり②の結果が一般の非線形項と初期値に対して正しければ), 単独・半線形の場合には(初期値が 0 という自明な場合を除けば)零条件が小さな初期値に対して大域解が存在するための必要十分条件であることが分かる. 残念ながら現時点では, この問題は解決には程遠い(これは外部問題に限らず全空間の場合も同様である).

(3) 零条件を満たす非線形項の評価にベクトル場の方法が有効に用いられてきた. Klainerman が最初に導入した方法はスケーリング作用素とローレンツ変換に関連した作用素(Lorentz boost)の双方が用いられていた. 他方, 久保-星賀氏, 横山氏らにより多重伝播速度を持つ波動方程式系を扱うために Lorentz boost は用いない方法が発見された. さらに申請者と久保氏によりスケーリング作用素も用いない方法が見出された. 外部問題の研究でこれらのことを考察するうちに, 副産物として Lorentz boost は用いるがスケーリング作用素は用いない方法もあることに気づいた. これを用いることにより波動とクライン-ゴルドン方程式の双方を含む連立系に対して自然な大域解の存在結果を得ることができた.

このような方程式系に対しては波動のみ, もしくはクライン-ゴルドンのみの方程式系を考えた場合と比べて, 極めて強い制約(Georgiev による強零条件)をつけた場合しか本研究以前には扱われていなかった.

ここで, 得られた結果を正確に述べる: 3 次元空間における波動とクライン-ゴルドンの双方から成る連立系の小さな初期値に対する全空間での初期値問題を考え,

① 波動方程式の右辺において, 波動のみの相互作用から成る部分は零条件を満たす.

② 非線形項の 2 次部分は波動の解の導関数のみを含む, もしくは波動方程式の右辺はすべて発散形式である

という条件の下で大域解の存在を示すことができた(査読付き雑誌にオンラインで掲載済; 冊子体は出版待ち). 上記の結果は Klainerman による零条件の下での結果と, クライン-ゴルドン方程式系に対する大域解の存在の結果を自然に含んでいる. アイデアとしては先に述べた零条件を満たす項に対する(スケーリング作用素を含まない)評価式を用いることと, クライン-ゴルドン方程式の右辺に含まれる波動の相互作用に関しては normal form (標準形)の議論を用いて零条件を満たす場合に帰着させることによる. 外部問題へこの結果を拡張するのは今後の課題である.

(4) 3 次元空間で半線形波動方程式系の初期値問題を考える. Alinhac によって零条件よりも弱い条件の下で時間大域解が存在することが示された. したがって(単独方程式の場合の予想とは異なり), 零条件は大域解存在のための必要条件ではないことが分かる(なお Alinhac の条件は単独の場合には零条件と一致する). Alinhac の結果に関連して次の結果を示した.

① 本質的にはほぼ同様であるが，Alinhac よりも若干弱い条件の下で小さな初期値に対する大域解の存在を示した．
② 大域解の各点的な漸近挙動を求めた．例えば，エネルギーが多項式オーダー，あるいは対数オーダーで増加し，結果として解が漸近的に自由解には近づかない場合があること(さらに解の各点的な減衰も自由解と比べて悪くなること)，エネルギーは有界に留まり，解の減衰も自由解と同様であるが，　漸近挙動は自由解とは異なる場合があることを明らかにした．
③ ①で導入した条件の下では，漸近挙動が自由解と同様になるのは零条件が満たされる場合のみに限られることを示した．

本研究結果は査読雑誌に投稿中である．これまで非線形波動方程式において，大域解を持つ場合の漸近挙動は自由解と同様のものしかほとんど知られていなかったため，より複雑な現象が起こりうることを明らかにした点は有意義であると考えられる．将来的には外部問題へこれらの結果を拡張したいと考えている．

(5) 3 次元空間において多重伝播速度を持つような(言い換えると成分毎に異なる伝播速度を持つような)非線形波動方程式系を考える．この場合，初期値問題および外部問題において，Klainerman の零条件を拡張した大域解の存在のための条件が知られている(以下，これも零条件と呼ぶ)．しかし，零条件を満たす項のうち，特に上見-横山氏により導入された非線形項を持つ場合には解の漸近挙動は全空間の場合ですらあまり明らかではなかった．(4) で開発された手法を多重速度の場合にも有効であるように改良することにより，次の結果を示した:
① 解の導関数の各点的な漸近挙動は自由解と同様であること，またエネルギーの意味で大域解は自由解に近づくことを示した．
② 上見-横山タイプの非線形項がない場合には，導関数のみならず，解それ自身も自由解と同様の振る舞いをすることを示した．
③ 上見-横山タイプの非線形項がある場合には，解それ自身は自由解と比べて減衰が悪くなりうることを示した．

本研究の結果は投稿準備中である．上記のうち①，③は外部問題の場合にも同様の結果を得ることが出来る．

(6) 2 次元空間で質量項が「共鳴」をおこすような 2 成分の準線形クライン-ゴルドン方程式系を考察した． Delort らによってこの場合の零条件が得られている．本研究では，零条件の下で normal form の議論を用いることにより以下の結果を得た．
① 零条件の下での小さな初期値に対する大域解の存在を示した．初期値の台がコンパクトでなくても扱える点が本研究の手法の利点である．
② エネルギーの意味で解が漸近自由になることを示した．

本研究は早稲田大学の小澤徹氏と大阪大学の砂川秀明氏との共同研究である(投稿中)．以前に比べると極めて平易な議論により結果が得られる点が利点である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① Soichiro Katayama, Global existence for coupled systems of nonlinear wave and Klein-Gordon equations in three space dimensions, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 2011, DOI: 10.1007/s2009-010-0808-0
② Soichiro Katayama and Hideo Kubo, The rate of convergence to the asymptotics for the wave equation in an exterior domain, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, 2010, Vol. 53, pp. 331-358

〔学会発表〕（計８件）

① Soichiro Katayama, Asymptotic behavior for systems of semilinear wave equations in 3D, Joint workshop on PDE at Jinhua, 2010 年 9 月 27 日, 浙江師範大学(Zhejiang Normal University, 中華人民共和国)
② 片山聡一郎, Asymptotic behavior for systems of nonlinear wave equations with multiple speeds in 3D, RIMS 研究集会“保存則と幾何学的偏微分方程式とその応用”, 2010 年 6 月 10 日, 京都大学数理解析研究所
③ 片山聡一郎, Asymptotic pointwise behavior for systems of semilinear wave equations in three space dimensions, 偏微分方程式姫路研究集会, 2010 年 2 月 23 日, イーグレ姫路
④ 片山聡一郎, Asymptotic pointwise behavior for systems of semilinear wave equations in three space dimensions, Linear and Nonlinear Waves, No. 7, 2009 年 11 月 14 日, ピアザ淡海
⑤ 片山聡一郎, 非線型波動方程式と Klein-Gordon 方程式の連立系に対する大域解の存在, 第 5 回非線型の諸問題, 2009 年 9 月 17 日, 長崎商工会議所
⑥ Soichiro Katayama, Global existence for systems of the nonlinear wave and

Klein-Gordon equations in 3D, 7th International ISAAC Congress, 2009年7月16日, Imperial College London (英国)

⑦ 片山聡一郎, 非線形波動方程式系の大域解の存在と null 条件について, 日本数学会 2008 年度秋季総合分科会 函数方程式論分科会特別講演, 2008年9月27日, 東京工業大学

⑧ 片山聡一郎, Asymptotic behavior of global solutions to some systems of semilinear wave equations, 第33回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 2008年8月27日, 北海道大学

６．研究組織

(1)研究代表者

片山　聡一郎 (KATAYAMA SOICHIRO)

和歌山大学・教育学部・教授

研究者番号：７０２８３９４２

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：