

機関番号：13103

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540215

研究課題名(和文) 作用素環の構造とその記号力学系の分類への応用

研究課題名(英文) Structure of operator algebras and its applications to
Classification of symbolic dynamical systems

研究代表者

松本 健吾 (MATSUMOTO KENGO)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：40241864

研究成果の概要(和文)：記号力学系の軌道同型と関連するC*環の研究を主として行い、結果を後述の3編の論文にまとめた。特に、位相的マルコフシフトの連続軌道同型類とカルタン部分環を保存するCuntz-Krieger環の同型類がきちんと対応することがわかった。また、記号力学系のC*-環への表現であるC*-記号力学系という新しい概念について、構成されるC*-環の単純性や、様々な例を調べた。ソフィックでない具体的な記号力学系からできるC*-環のK-群の計算も行った。また、温度が必ずしも実数値をとらない複素数に値をとるKMS条件をC*-記号力学系に対して研究を開始した。

研究成果の概要(英文)：I have studied mainly orbit equivalence of symbolic dynamical systems and related C*-algebras. The results have been published in three papers. Especially, it has been proved that the continuous orbit equivalence classes of one-sided topological Markov shifts exactly correspond to the isomorphism classes of the associated Cuntz-Krieger algebras keeping their Cartan subalgebras. I also studied simplicity condition and several examples of C*-algebras defined by C*-symbolic dynamical systems. K-theory groups for C*-algebras associated with concrete non sofic subshifts have been studied. I have begun to study KMS condition for C*-symbolic dynamical systems for which inverse temperatures are not necessarily real numbers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環、C*-環、記号力学系、サブシフト、軌道同型

1. 研究開始当初の背景

(1) 記号力学系(サブシフトとも呼ばれる)とは、有限個の文字(アルファベット)を固定し、その文字からなる両側もしくは片側無限列全体の作るコンパクト、ハウスドルフ空間を考え、その位相空間の上のシフト(番号1つずらし)で不変な、閉部分空間に対して、

その閉部分空間とシフトからなる位相力学系をいう。マルコフ連鎖に付随する位相的マルコフシフトも典型的な例であり、エルゴート理論だけでなく、言語理論や、計算機理論の中にも、数多くの記号力学系のモデルとなるものがある。応用面においては号理論において現れる文字列の符号化や復号化などに

実際にその理論が役立っている。Cuntz-Krieger は、1980年に、位相的マルコフシフトから、単純純粋無限型 C^* -環を構成した(Invent. Math. 56(1980))。これらは Cuntz-Krieger 環と呼ばれ、 C^* -環論のなかでも、数少ない良い研究対象のモデルとなる単純 C^* -環の例である。本研究代表者は、これら Cuntz-Krieger 環の一般化として、位相的マルコフシフトとは限らない一般の記号力学系から C^* -環を構成する方法を1997年に発表していた(International J. Math. 8(1997),357-374)。この C^* -環には、ゲージ作用と呼ばれる1次元トーラスの標準的な作用があり、その作用による不動点環は AF-環(有限近似的 C^* -環)になる。翌1998年の論文 Math. Scand. 82(1998),237-255 に於いて、この記号力学系から構成された C^* -環ならびにその内部の AF-環の代数不変量である K-群、Ext-群、次元群を計算する公式を発見し、それらの K-理論的群がもとの記号力学系の位相共役不変量になっていることを後に続く論文 Documenta Math. 4(1999), 285-340、Ergodic Theory and Dynamical System 20(2000), 821-841 で証明した。このようにして、 C^* -環の K-理論を経由することにより、それまで知られていなかった記号力学系の位相共役不変量が一挙に定義された。また、その K-群公式の中から上記 Documenta 論文において λ -graph system, symbolic matrix system という従来の有向有色有限グラフ、有限記号行列を一般化した概念を導入して、それが記号力学系の表現を与えることを示し、記号力学系をグラフ的なもの、行列的なものとしてみるのが可能になった。与えられた記号力学系からある標準的な方法でそれを表現する λ -graph system, symbolic matrix system をつくることできる。この Documenta 論文で、二つの記号力学系が位相共役であることと対応する標準 λ -graph system, symbolic matrix system がそれぞれ強シフト同値であることを証明した。また、申請者は、論文 Documenta Math. 7(2002), 1-30 において記号力学系から作られる C^* -環の構成を一般化し、 λ -graph system から C^* -環を構成することにも成功した。つまり、記号力学系のみならずその表現からも C^* -環を構成することが可能となった。これらの C^* -環はもとの記号力学系や λ -graph system が既約であれば単純かつ純粋無限型 C^* -環になり、作用素環の構造論的観点からたいへん重要なクラスにある C^* -環であり、これらの C^* -環それ自身を研究することだけでも大変興味深い課題である。さらにこれらの C^* -環の K-理論的な不変量がもとの記号力学系の位相共役不変量をあたえていることを考

えると、なおさら重要な研究対象である。また、J. Reine. Angew. Math. 605(2007) において、 λ -graph system, symbolic matrix system というグラフや、行列によって定義される概念を、さらに一般化し、 C^* -記号力学系という概念を導入した。 C^* -記号力学系とは、単位元を持った C^* -環 A とそれ上の記号 Σ で添字つけられた有限個の自己準同型からなる組のことであり、特に、 C^* -環 A が、可換有限次元環、可換 AF 環のときは、それぞれ有向有色有限グラフ、 λ -graph system と全く同じ概念となる。 C^* -記号力学系の各自己準同型はグラフの有向有色辺に対応し、記号力学系が自然に定義される。逆にどんな記号力学系もある C^* -記号力学系から定義される。従って、 C^* -記号力学系という概念は、記号力学系の C^* -代数的な表現であると考えられる。 C^* -記号力学系から、自然にヒルベルト C^* -双加群が定義され従って、 C^* -環が構成される。この C^* -環達は、前述の Cuntz-Krieger 環や λ -graph system からできる C^* -環を完全に含んだクラスになり、この C^* -環自身の構造も Cuntz-Krieger 環からかけ離れた性質をもつものなが多くあることもわかっている。たとえば、Cuntz-Krieger 環や λ -graph system からできる C^* -環のゲージ作用の不動点環は AF 環であったが、ゲージ作用の不動点環が AT 環や、Bunce-Deddes 環になるものもあり、K-理論的にも、非常に興味深い。もちろんこれらの C^* -環の代数的な構造は、記号力学系の不変量にもなっているので、記号力学系の位相共役不変量の研究の意味においても、重要な不変量をあたえているのではと考えられる。(2) また、位相力学系の分類において、位相共役よりも弱い軌道同型による分類もたいへん興味深く重要な問題である。二つの位相力学系が軌道同型であるとは、それらの軌道を保った同相写像が存在するときをいう。カントール集合上の極小自己同相による連続軌道同型類と対応する C^* -環の同型類の研究は、Giordano-Putnam-Skau (J. Reine Angew. Math. 469(1995), 51-111) により、詳しく研究されており、これらの力学系の(強)軌道同型類とその C^* -接合積の代数同型類が完全に対応することが証明されている。一般のコンパクトなハウスドルフ空間上の topological free な自己同相については、富山 (Pacific. J. Math. 173(1996), 571-583) により、連続軌道同型類と空間部分を保った C^* -接合積の代数同型類が完全に対応することが証明されている。Cuntz-Krieger 環や λ -graph system からできる C^* -環は、それぞれ片側マルコフシフト、片側サブシフトからできる C^* -環とも考えられる。片側マルコフシフト、片側サ

ブシフトは、同相写像ではないので、上記 Giordano-Putnam-Skau や富山が研究したケースは、あてはまらない。そこで、この片側マルコフシフトや片側サブシフトの軌道同型類と対応する Cuntz-Krieger 環や lambda-graph system からできる C*-環の同型類が完全に対応するかという問題が自然におこる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、これら C*-環の K-理論やさらには、KK-理論的な構造にもっと深くふみこみ、さらには、その C*-環の代数的な構造を基になっている記号力学系の構造から、さらに詳細に調べたい。さらには、それにより、新たな記号力学系の位相共役不変量を発見したいと考えている。これらの C*-環達はもとの記号力学系の位相共役類を完全に代数的に表現していると予想されるので、これらの C*-環の K-理論構造や代数構造を使って、記号力学系の位相共役類を表わす完全不変量を構成できればと考えている。特に記号力学系の軌道同型の不変量の発見や、K-群の flow equivalence 不変量としての計算を具体例から実行する。また、記号力学系のゼータ関数の作用素環論的解釈も研究の目的の一つとしたい。

3. 研究の方法

2008年度の7月1週間にわたりオランダのライデン大学で開催された力学系と作用素環の国際会議に出席し、記号力学系の軌道同型と作用素環の同型類について、それまでに分かっていた結果を講演した。参加していた、W. Krieger 教授 (ハイデルベルグ大学 lambda-synchronization という記号力学系の性質について議論を行った。また、同会議に出席していた、ルノー教授、エクセル教授 (ブラジル、サンパウロ大学)、連携研究者の富山教授と軌道同型と Cartan 部分環について、研究討論をおこなった。

また、9月と1月に行われたの京都大学での作用素環の研究集会に出席し、九州大学の綿谷安男教授、大阪教育大学の片山良一氏らと交流し研究討論を行った。

また、2009年度は、3度にわたり研究集会を利用し研究交流と討論のため、京都大学数理解析研究所を訪問し、参加者の連携研究者の富山教授、九州大学の綿谷安男教授、岡山大学の梶原毅教授と主として、軌道同型と K-理論、C*-環の構造について議論を行った。特に綿谷安男教授、梶原毅教授は Hilbert 双加群からできる C*-環の専門家であるので、双加群 C*-環としての、記号力学系からできる C*-環について、より深い研究討論ができた。

2010年度は、京都大学数理解析研究所で

行われた作用素環の研究集会において、記号力学系のゼータ関数を用いて作用素環で取り扱うために、KMS 条件について講演し、出席者と研究討論を深めた。

4. 研究成果

まず、記号力学系の軌道同型と対応する C*-環の代数構造に関する研究を行った。結果は、3編の論文

Orbit equivalence of one-sided subshifts and the associated C*-algebras, *Yokohama Mathematical Journal*, 56 巻, 2010, 59-85.

Orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras, *Pacific Journal of Mathematics*, 246 巻, 2010, 199-255.

Orbit equivalence in C*-algebras defined by actions of symbolic dynamical systems, *Contemporary Mathematics*, 503 巻, 2009, 121-140.

に発表した。証明されたことは、片側位相的マルコフシフトの軌道同型類は Cartan 部分環を保った Cuntz-Krieger 環の同型類に完全に対応するということである。また充足群についてもその同型類との対応が示された。この事実は、上記 *Yokohama Mathematical Journal* の論文において一般の記号力学系に一般化され、*Contemporary Mathematics* 誌の論文で C*-記号力学系からできる C*-環にさらに一般化され、コンパクト集合上の同相写像について得られている富山の結果も含んだ形で拡張された。

また、sofic でない記号力学系からできる単純 C*-環の例として、Wolfgang Krieger, と共同で、論文

Subshifts and C*-algebras from one-counter codes, *Contemporary Mathematics* 503 巻, 2009, 93-119.

に発表した。この記号力学系のクラスは one-counter codes と言われ、自分自身とその transpose が flow equivalence にならない記号力学の例であることも分かった。そのような記号力学系の例は今まで見つかっていなかったもので、特筆すべき結果であると言える。

また、さらに一般のコード系に対して、単純 C*-環が構成されることがわかり、その K-群も計算して、論文

A class of simple C*-algebras arising from certain nonsocifc subshifts, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 31 巻, 2011, 459-482.

にまとめた。C*-記号力学系からできる C*-環の例とその構造についても調べ、結果

は論文

Actions of symbolic dynamical systems on C^* -algebras II. Simplicity of C^* -symbolic crossed products and some examples, *Mathematische Zeitschrift* 265 巻、2010、735-760.

に発表した。

また、記号力学系のゼータ関数の C^* 環的解釈の一つの試みとして、温度が必ずしも実数値をとらない KMS 条件を導入し、2020 年 9 月に京都大学で行われた作用素環の研究集会において口頭発表を行った。

また、記号力学系の高次元版であるタイル張り C^* -環についても研究を着手し、タイル張りの C^* -環への作用という概念を定義し、構成される C^* -環について学会の講演集に発表した (2010 年 3 月早稲田大学)。連携研究者の富山淳は、記号力学系を含んだ力学系のクラスとその C^* -環について研究し、特に C^* -環のイデアル構造とものの力学系の位相的情報について深く調べ、下の 2 編の論文 (*Acta applicable Mathematics* 誌と *Journal of Functional Analysis* 誌) に発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

① 松本 健吾, A class of simple C^* -algebras arising from certain nonsocif subshifts, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 査読有, 31 巻、2011、459-482.

② 松本 健吾, Orbit equivalence of one-sided subshifts and the associated C^* -algebras, *Yokohama Mathematical Journal*、査読有 56 巻、2010、59-85.

③ 松本 健吾, Orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras, *Pacific Journal of Mathematics*, 査読有 246 巻、2010、199-255.

④ 松本 健吾, Actions of symbolic dynamical systems on C^* -algebras II. Simplicity of C^* -symbolic crossed products and some examples, *Mathematische Zeitschrift* 査読有, 265 巻、2010、735-760.

⑤ 富山 淳, Classification of ideals homeomorphism C^* -algebras and

quasidiagonality, *Acta applicable Mathematics*, 108 巻(2009), 561-572.

⑥ Svensson Christa, 富山 淳, On the commutant of $C(X)$ in C^* -crossed products by Z , *Journal of Functional Analysis*, 256 巻、2009、2367-2386.

⑦ 松本 健吾, Orbit equivalence in C^* -algebras defined by actions of symbolic dynamical systems, *Contemporary Mathematics*, 査読有, 503 巻、2009、121-140.

⑧ Wolfgang Krieger, 松本 健吾, Subshifts and C^* -algebras from one-counter codes, *Contemporary Mathematics* 査読有, 503 巻, 2009、93-119.

⑨ 松本 健吾, Textile systems on lambda-graph systems, *Yokohama Mathematical Journal*, 査読有, 54 巻、2008、161--206.

[学会発表] (計 3 件)

① 松本 健吾, タイルばりの作用からできる C^* -環について、日本数学会、2010 年 3 月 22 日、早稲田大学。

② 松本 健吾, C^* -力学系の Jordan 標準形と KMS 条件、日本数学会、2009 年 9 月 25 日、大阪大学。

③ 松本 健吾, The C^* -algebras of one-counter codes and flow equivalence, 日本数学会、2009 年 3 月 28 日、東京大学駒場。

[図書] (計 1 件)

松本 健吾
Applications of infinite labeled graphs to symbolic dynamical systems, *Structural Analysis and Complex Networks* (M. Dehmer 編, 共著), 137--168, Springer 2010

[その他]

ホームページ等

<http://www.juen.ac.jp/math/matsumoto/matsumoto.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松本 健吾 (MATSUMOTO KENGO)

上越教育大学・大学院学校教育研究科・教授

研究者番号：40241864

(2)研究分担者

(3)連携研究者

富山 淳(TOMIYAMA JUN)

東京都立大学・理学部・名誉教授

研究者番号：30006928