

平成23年 5月 1日現在

機関番号：32660  
研究種目：基盤研究（C）  
研究期間：2008～2010  
課題番号：20540218  
研究課題名（和文）多様体上の解析学の研究

研究課題名（英文）Study of Analysis on Manifolds

## 研究代表者

古谷 賢朗 (FURUTANI KENRO)  
東京理科大学理工学部 教授  
研究者番号：70112901

## 研究成果の概要（和文）：

主にサブリーマン多様体に関する幾何学的大域解析学的研究を行った。ここでのサブリーマン構造はその非ホロミック部分束がベクトル束としては自明を意味し、3次元と7次元の球面及びベキ零多様体上のサブラプリアンのスペクトルゼータ関数について、解析接続の記述と留数やゼータ正則化行列式の具体的な表示等を研究した。又一般に、サブマーシオンを通じて上にあるサブラプリアンから底空間上に準楕円型作用素(=グルシン型作用素)が存在する枠組みを明確にし(特にファイバー束の場合について)、それらの陪特性曲線の関係を研究した。特にその代表例であるホップ束  $S^3 \rightarrow CP^1$  の場合に  $S^3$  上のサブリーマン測地線と  $S^2$  上の等周問題の解との対応を見だし、 $S^3$  の左、右の四元数積構造で定義される二重ファイバー束構造を通じて、 $S^2$  上のグルシン型作用素の陪特性曲線を決定した。

## 研究成果の概要（英文）：

Mainly we focused our study on the topics on analytic and geometric aspects of sub-Riemannian manifolds. Our sub-Riemannian manifolds are in the strong sense, that is, the sub-Riemannian structure is defined by a non-holonomic sub-bundle which is trivial as a vector bundle. So we have a sub-elliptic operator on such manifolds, which we call sub-Laplacian. Examples of such manifolds are three and seven dimensional spheres, or nilmanifolds and we studied their spectral zeta functions from the point of views of analytic continuation, residue calculus and the explicit determination of zeta regularized determinant. Also, we investigate a general framework to define a sub-elliptic operator from a sub-Laplacian on the total space to the base manifold through a submersion (or more specifically fiber bundle setting) and obtained a relation between their bi-characteristic flows. Especially we find a relation between sub-Riemannian geodesics on  $S^3$  through Hopf fiber bundle  $S^3 \rightarrow CP^1$  by notifying their relation with the isoperimetric aspect of curves on  $CP^1$  and by considering double fiberings defined by left and right quaternion multiplication structure on  $S^3$ , we determine bi-characteristic flow of the spherical Grushin operator.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1200000	360000	1560000
2009年度	1100000	330000	1430000
2010年度	1000000	300000	1300000
年度			
年度			
総計	3300000	990000	4290000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：sub-Riemann 多様体, sub-Laplacian, 熱核, spectral zeta function, zeta-regularized determinant, ベキ零リー群, Grushin type 作用素, non-holonomic sub-bundle, Toeplitz 作用素, 幾何学的量子化

1. 研究開始当初の背景

大域解析学は 1950 年代前後から研究が始まり、多様体論の進展と共に長足の進歩を遂げた。特に、Atiyah-Singer 指数定理や熱核漸近展開等に代表される作用素の不変量と幾何学的位相的不変量を関係付ける一連の結果は、物理学に於ける古典力学と量子力学の対応関係の観点から解釈することによって統一的に理解できる。すなわち、作用素の二つの不変量の内一つは作用素のスペクトルから定義される量（量子力学的量、スペクトル不変量）であり、もう一つは作用素が定義されている多様体に付随する幾何学的不変量（古典力学的量）である。これらの不変量の間関係が数学的に重要な定理として把握される。本研究はこの観点を指針にして、関数解析的枠組を理論構成の中心に置き、作用素の不変量であるスペクトルに関連する諸問題の幾何学的、大域解析学的且つ“構成的”な研究である。楕円型微分作用素に関するこの観点からの研究結果は膨大なものがあるが、sub-Laplacian の様に楕円型ではないが楕円型に近い性質を持つものの研究は、その様な作用素が幾何構造により自然に定義される多様体の分類から始める必要があ

り、本研究はそこから始まり、ここで扱う作用素は楕円型作用素はもちろんであるが、主に準楕円型作用素でありそのスペクトル、熱核の大域解析的、幾何学的研究は多様体論への応用から、幾何学的量子化理論や超局所解析的側面、更に数理物理学にわたり、今後も数学研究の大きな問題である。

2. 研究の目的

- (1) ベキ零 Lie 群及びその等質空間上の sub-Laplacian 及び Laplacian の熱核及び Green 核の具体的構成とスペクトル幾何学への応用。
- (2) 幾何学的量子化と Toeplitz 作用素の研究。
- (3) Fredholm-Lagrangian-Grassmannian の位相と Maslov 指数等の指数の研究。

3. 研究の方法

本研究は理論研究なので主に同じ方面の研究を行っている研究者との討議、連携研究者、研究協力者間の相互訪問及びアイデアの交換を通じての研究が主要な方法である。2009 年 10 月には海外研究協力者である Wolfram Bauer 教授と他二名の教授をドイツから招聘し、関連する話題の講演会を本学で

開催、いろいろな角度から研究の進展に役立てた。理論展開の数学的方法は

- (1) 擬微分作用素の理論による放物型方程式の基本解の構成、
- (2) Complex Hamilton-Jacobi method による sub-Laplacian の熱核の構成、
- (3) Mellin 変換を通じて解析接続と short time asymptotics の対応、
- (4) クリフォード代数の表現を用いたベクトル場の構成
- (5) Selberg trace formula の具体的計算等である。

#### 4. 研究成果

(1)  $L_2(X, d\mu)$  に含まれる再性核を持つヒルベルト空間に関して、有界 symbol を持つ Hankel 作用素の Hilbert-Schmidt 性を Berezin 変換を通じて研究をした。ここでの方法は主に Berezin 変換を繰り返すことにより現れる現象を通じておこなった。この研究成果は Segal-Bargmann space での現象を拡張したものであり、様々な場合に適用できる (発表論文 ⑤、⑥、⑦)。

(2)  $S^3$  上の sub-Laplacian 及びそれから構成される、 $S^2$  上の Grushin type 作用素の熱核と固有値の決定および zeta 正則化行列式の具体的決定をおこなった。楕円型でなく、準楕円型作用素に対してのゼータ正則化行列式の具体的決定は、よりデータが必要とされ容易でないが、3次元で一つ計算可能であることが分かった (発表論文 ③、④)。

(3)  $S^7$  の余次元 1 の sub-Riemann 構造の sub-Laplacian の熱核と固有値達の決定と余次元 3 の sub-Riemann 構造の構成を 8 元数を用いないで行った。これは (2) の類似の結果を  $S^7$  まで拡張するための出発点となる (発表論文 ③)。

(4) 古谷が 2003 年の論文 (Determinant of Laplacians on Heisenberg Manifolds, Journal of Geometry and Physics, Vol. 48) で直積 Riemann 多様体の Laplacian のゼータ正則化行列式の一般公式を得たが、これを拡張して、sub-Riemann 多様体の直積の場合の sub-Laplacian のゼータ正則化行列式の一般公式を得た。このために、高々一次の極のみを持つ有理型に解析接続可能なディリクレ級数の積が又一次の極のみを持つ様子を一般的に研究し、sub-Riemann 多様体と Riemann 多様体の直積でも sub-Laplacian のスペクトラルゼータ関数は一位の極のみを持ち、更に原点で正則であることを証明し、クロネッカーの第二極限公式の拡張と見なせるゼータ正則化行列式の一般公式を、Kodaira-Thurston 多様体の場合を含むいくつかについて具体的に書き下した (発表論文 ②)。

(5) sub-Riemann 構造が平行化可能でそこからの submersion があつたときに sub-Laplacian に付随する Grushin type 作用素と呼んでいる、底空間上に準楕円型作用素が定義出来る一般状況を考え、それらの陪特性曲線の局所的な関係を明らかにした。具体的な場合、特にベキ零リー群とその商空間、また 3次元球面と 2次元球面等の場合に、陪特性曲線を等周問題の解としての解釈に基づき大域的にすべて決定した。また 2次元球面上の Grushin type 作用素 (spherical Grushin operator) の熱核に対する無限級数表示も得たが、この母関数にあたる関数を複素 Hamilton-Jacobi 方法を用いて構成することが今後の問題の一つとして残った。このような作用素が存在し、さらに熱核、特に固有値が具体的に計算できる例はコンパクトベキ零多様体のなかにいろいろあり、その spectral zeta 関数の関数の class がおおよ

そ分かってきたので、このすべてにわたって計算をするための準備を進めた（発表論文①）。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計7件）

①Wolfram Bauer, Kenro Furutani, Chisato Iwasaki; Spectral Analysis and Geometry of a sub-Laplacian and related Grushin type operators, Advances in Partial Differential Equations, Birkhauser, 査読有, Vol. 211, 183-290 (2010)

②Wolfram Bauer, Kenro Furutani; Spectral zeta function of a sub-Laplacian on product sub-Riemannian manifolds and zeta-regularized determinant, 査読有, Journal of Geometry and Physics, Vol. 60, 1209-1234(2010)

③ Wolfram Bauer and Kenro Furutani; Spectral Analysis and Geometry of a Sub-Riemannian Structure on  $S^3$  and  $S^7$ , Journal of Geometry and Physics, 査読有, Vol. 58, No. 12, 1693-1738 (2008)

④Wolfram Bauer and Kenro Furutani; Zeta regularized Determinant of the Laplacian for classes of spherical space forms, Journal of Geometry and Physics, 査読有, Vol. 58, No.2, 64-88(2008)

⑤ Wolfram Bauer and Kenro Furutani; Hilbert-Schmidt Hankel Operstors and Berezin Iterations, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, Vol.31, No.2, 293-319(2008)

⑥ Wolfram Bauer and Kenro Furutani; Compact operators and the pluriharmonic Berezin transform, International Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 19, No. 6, 645-669(2008)

⑦ Wolfram Bauer and Kenro Furutani; Quantization operators on Quadrics, Kyushu Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 62, No. 1, 221-258(2008)

〔学会発表〕（計9件）

① Kenro Furutani; Theta functions and sub-Riemannian manifolds, International Workshop Operators on Singular Spaces, University of Potsdam, Potsdam, Germany, 2010年3月9日, 招待講演

②Kenro Furutani; Spectrum and Heat kernel

on nilmanifolds, Fu-Jen Catholic university Analysis Forum, Taipei, Taiwan, 2009年12月24日, 招待講演

③ Kenro Furutani; Generalized Atiyah-Patodi-Singer boundary conditions and a variation of spectral flow formula, Abstract Harmonic Analysis 2009 at National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, 2009年12月19日, 招待講演

④Kenro Furutani; Kaehler structure on the punctured cotangent bundle and geometric quantization, 2009 Taiwan-Norway Joint Workshop on Geometric Analysis and Mathematical Physics, National Center for Theoretical Science, Division mathematics, National Shinhua University, Hinchu, Taiwan, 2009年12月15日, 招待講演

⑤ Kenro Furutani; Heat kernel of a sub-Laplacian and Grushin type operators, ISAAC congress at London 2009, Imperial college, London, England, 2009年7月, 招待講演

⑥ 古谷賢朗; Zeta-regularized determinant of product manifolds and Kronecker's second limit formula, 姫路偏微分方程式研究集会, 兵庫県立大学, 2009.2.20, 招待講演

⑦Kenro Furutani; Grushin type operator, singular Riemannian geometry and heat kernel, Workshop on elliptic and parabolic equations, at University of Potsdam, Germany, 2009.1.5, 招待講演

⑧Kenro Furutani; Heat Kernel and Spectral Zeta Function of sub-Laplacian on  $S^3$  and  $S^7$ , International Conference on Partial Differential Equations and Spectral Theory at Haus Hessenkopf 38644, Goslar, Germany, 2008.9.5, 招待講演

⑨Kenro Furutani; Sub-Riemann structure and Grushin operator, Pseudo-differential operators and related topics at Vaxjo Univerity, Sweden, 2008.6.2, 招待講演

〔図書〕（計1件）

Ovidiu Calin, Der-Chen Chang, Kenro Furutani and Chisato Iwasaki; Heat Kernels for Elliptic and Sub-elliptic Operators, Methods and Techniques, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhauser (2010), 査読有, 451page

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

古谷 賢朗 (FURUTANI KENRO)  
東京理科大学理工学部・教授  
研究者番号：70112901

### (2) 研究分担者：無し

( )  
研究者番号：

### (3) 連携研究者

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)  
兵庫県立大学大学院物質理学研究科・教授  
研究者番号：30028261

森本 徹 (MORIMOTO TORU)  
奈良女子大学理学部・教授  
研究者番号：80025460