

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5 月 8 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008～2012

課題番号：20540219

研究課題名（和文） 消散型波動方程式の解の拡散現象

研究課題名（英文） Diffusion phenomenon of solutions for the damped wave equation

研究代表者

西原 健二（NISHIHARA KENJI）

早稲田大学・政治経済学術院・教授

研究者番号：60141876

研究成果の概要（和文）： 消散型波動方程式のコーシー問題の解は時間発展とともに対応する拡散方程式のコーシー問題の解と同様の挙動をすることが分かっている。この現象を消散型波動方程式の「解の拡散現象」と呼んでいる。時間或いは空間変数に依存する係数を持つ消散項が効果的な場合に、半線形波動方程式のコーシー問題を考え、半線形項の臨界指数と、対応する優臨界、劣臨界の場合に、時間大域解の存在、解の減衰レート、解の漸近形、有限時間内の解の爆発等について考察をしてきた。

研究成果の概要（英文）： The solution to the Cauchy problem for the damped wave equation behaves like that for the corresponding diffusive equation as time tends to infinity, which is called the diffusion phenomenon of solutions to the damped wave equation. When the damping term with coefficients depending on time or space variables is effective, the Cauchy problems for the semilinear damped wave equations are investigated, and the critical exponents on the semilinear term have been explored. In the corresponding supercritical and subcritical cases, the existence of global-in-time solution, its decay rate, asymptotic profile, blow-up of solution within a finite time etc. are considered.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	600,000	180,000	780,000
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：細目：数学・大域解析学

キーワード：消散型波動方程式・拡散現象・臨界指数・時間大域解・解の爆発

1. 研究開始当初の背景

消散型波動方程式のコーシー問題の解は、定数係数の線形消散項を持つ場合には、対応する拡散方程式の解と、波動方程式の解に速く減衰する指数関数が掛けられた項の和で書けることが分かっており、従って、半線形消散型波動方程式の問題に対しては、半線形

熱方程式に対する藤田指数がやはり臨界指数であることが示されている。対応して、優臨界、劣臨界の場合、および、半線形項が吸収項として、あるいは湧出項として働く場合に、それぞれ、時間大域解の存在、解の減衰レート、解の漸近形、さらに、有限時間内の解の爆発などが多くの場合に得られていた。

2. 研究の目的

定数係数の消散項の場合には、上述のように、解の拡散現象が成立する。そこで、時間或いは空間変数に依存する係数を持つ消散項の場合には、時間或いは空間変数が無限大となる時係数が十分早く減衰すれば、消散項が弱くなり（消散項は非効果的という）、消散型波動方程式の解は対応する波動方程式の解と同様の挙動が期待され、解の波動現象が現れる。消散項が効果的となる時は解の拡散現象が期待される。そこで、定数係数の消散項の場合と同様に、臨界指数および関連する解の性質を探求することが求められ、それが研究の目的である。

3. 研究の方法

研究目的のための手段として基本的には、Todorova と B. Yordanov による重み付エネルギー法の改良と、Qi S. Zhang によるテスト関数の方法を用いた。前者は、コーシー問題の時間大域解の存在と減衰評価を求めるために用いられ、後者は、時間局所解が有限時間内に爆発することを示すために用いられた。もちろん、それぞれに工夫や新しいアイデアが必要で、通り一遍のやり方では解決できない。新しいアイデアを国内外の吸収するためにも、国内外の研究集会に出席し、成果を発表するだけでなく、参加研究者の研究発表を聴くこと、或いは、出席研究者との意見交換、討論は必須であったし、それによる新たな発展もあった。そのようにして得られた成果は、国内外の研究集会での発表だけでなく、学術雑誌に投稿してきた。

4. 研究成果

研究目的の項で述べたように、主に考察した課題は、空間或いは時間に依存する係数を持つ消散項が効果的、すなわち、消散型波動方程式の解が拡散現象を持つ場合に、半線形消散型波動方程式のコーシー問題で、半線形項の臨界指数および関連する解の性質を探求した。

(1) 時間変数に依存する係数を持つ線形消散項が効果的で、半線形項が吸収項として働く場合に、消散型波動方程式のコーシー問題の解の最適或いはほぼ最適と思われる減衰レートを求めた（下記雑誌論文[8]）。

(2) 空間変数に依存する係数を持つ線形消散項が効果的のとき、半線形項が吸収項として働く場合に、解の減衰及び漸近形（空間1次元のとき）を求めた（雑誌論文[4, 10]）。その結果、時間に依存する係数であるにもかかわらず、定数係数の場合の臨界指数である

藤田指数が臨界指数であることが空間1次元のときに分かった。空間2次元以上の場合には未解決のまま残った。

半線形項が湧出項として働く場合は、臨界、劣臨界の場合に解の爆発を示さなければならない。Qi S. Zhang のテスト関数の方法にアイデアを加えて、解の爆発を証明することに成功し、この場合には、空間次元にかかわらず、藤田指数が臨界指数であることを証明することができた（雑誌論文[1]）。

(3) 時間と空間の両方に依存する係数の場合も考察し、いろいろなケースの解の漸近挙動を得た（雑誌論文[3, 7]）。しかしながら、解の爆発をきれいに示すことができず、臨界指数の確定は未解決の問題として残った。

(4) 上記の結果などは国内外の研究集会等で発表してきた（下記学会発表参照）。特に、総合報告として、論説（雑誌論文[9]）の記述や、招待講演（学会発表[1, 2]）の機会を得た。また、東北大学大学院での集中講義は、講義ノート（下記図書[1]）として記録された。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 11 件）

[1] J. Lin, K. Nishihara and J. Zhai, Critical exponent for the semilinear wave equation with time-dependent damping, *Discrete Cont. Dynam. Syst.* 32 (2012), no. 12, 4307-4320. （査読あり）

[2] K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for a system of semilinear heat equations and the corresponding damped wave system, *Osaka J. Math.* 49 (2012), 331-348. （査読あり）

[3] J. Lin, K. Nishihara and J. Zhai, Decay property of solutions for damped wave equations with space-time dependent damping term, *J. Math. Anal. Appl.* 374 (2011), no. 2, 602-614. （査読あり）

[4] K. Nishihara, Asymptotic profile of solutions for 1-D wave equation with time-dependent damping and absorbing semilinear term, *Asymptotic Analysis* 71 (2011), 185-205. （査読あり）

[5] K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions to the semilinear wave

equation with time-dependent damping, Tokyo J. Math. 34 (2) (2011), 327-343. (査読あり)

[6] K. Nishihara, Asymptotic behavior of solutions for the damped wave equation with absorbing semilinear term, "Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics", RIMS Kokyuroku 1690, Kyoto University (2010), 29-38. (査読なし)

[7] J. Lin, K. Nishihara and J. Zhai, L^2 estimates of solutions for damped wave equations with space-time dependent damping term, J. Differential Equations 248 (2010), 403-422. (査読あり)

[8] K. Nishihara, Decay properties for the damped wave equation with space dependent potential and absorbed semilinear term, Commun. Partial Differential Equations 35 (2010), 1402-1418. (査読あり)

[9] 西原 健二, 消散型波動方程式のコーシー問題の解の拡散現象, 「数学」, 62 巻 2 号 (2010), 164-181. (論説) (査読あり)

[10] K. Nishihara and J. Zhai, Asymptotic behaviors of solutions for time dependent damped wave equations, J. Math. Anal. Appl. 360 (2009), 412-421. (査読あり)

[11] K. Nishihara, Location of the asymptotic profile for one-dimensional chemotaxis system, "Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics", RIMS Kokyuroku 1631, Kyoto University (2009), 60-67. (査読なし)

[学会発表] (計 14 件)

以下の項はすべて西原健二(Kenji Nishihara)による発表である.

[1] 講演タイトル: Diffusion phenomenon of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation
研究集会名: 4th MSJ-SI(Mathematical Society of Japan Seasonal Institute) "Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations"
発表年月: 2011 年 9 月 20 日
発表場所: Kyushu University

[2] 講演タイトル: Critical exponent for the semilinear wave equation with time-dependent damping
研究集会名: 8th ISAAC Congress
発表年月: 2011 年 8 月 24 日
発表場所: Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia

[3] 講演タイトル: Critical exponent for semilinear wave equation with time-dependent damping
研究集会名: 流体と気体の数学解析
発表年月: 2011 年 7 月 12 日
発表場所: 京都大学

[4] 講演タイトル: Asymptotic profile of solutions to the Cauchy problem for the weakly coupled damped wave system
研究集会名: 発展方程式シンポジウム
発表年月: 2011 年 3 月 12 日
発表場所: 東海大学

[5] 講演タイトル: Large time behavior of solutions to the Cauchy problem for the damped wave equation with absorbing semilinear term
研究集会名: Kinetic Equations and Hyperbolic Conservation Laws
発表年月: 2010 年 11 月 30 日
発表場所: National University of Singapore, Singapore

[6] 講演タイトル: Asymptotic behavior of solutions to the Cauchy problem for the weakly coupled damped wave system
研究集会名: International Workshop on Partial Differential Equations and Mathematical Physics
発表年月: 2010 年 10 月 31 日
発表場所: Zhejiang University of Technology, Hangzhou, China

[7] 講演タイトル: Asymptotic profile of solutions to the Cauchy problem for the weakly coupled damped wave system
研究集会名: 非線型の諸問題
発表年月: 2010 年 9 月 17 日
発表場所: 山口大学

[8] 講演タイトル: Large time behavior of solutions to the Cauchy problem for the semilinear damped wave equation
研究集会名: 2010 Chinese-German conference on fluid and gas dynamics

発表年月：2010年5月22日
発表場所：Zhejiang Normal University,
Jinhua, China

[9] 講演タイトル：Remarks on solutions for
the damped wave equation with
sourcing semilinear term

研究集会名：偏微分方程式の諸問題
発表年月：2009年11月1日
発表場所：東海大学

[10] 講演タイトル：Asymptotic behavior of
solutions for the damped wave
equation with absorbing semilinear
term

研究集会名：流体と気体の数学解析
発表年月：2009年7月12日
発表場所：京都大学

[11] 講演タイトル：Decay properties for the
wave equation with space-dependent
damping

研究集会名：発展方程式シンポジウム
発表年月：2009年3月12日
発表場所：東海大学

[12] 講演タイトル：The damped wave
equation with space dependent
potential

研究集会名：Nagoya Workshop on
Differential Equations
発表年月：2009年2月15日
発表場所：名古屋大学

[13] 講演タイトル：Location of the
asymptotic profile for one-dimensional
chemotaxis system,

研究集会名：流体と気体の数学解析
発表年月：2008年7月12日
発表場所：京都大学

[14] 講演タイトル：Behavior of solutions
for the semilinear heat equation and
damped wave equation with slowly
decaying data,

研究集会名：AIMS Seventh International
Conference on Dynamical Systems,
Differential Equations and
Applications
発表年月：May 19, 2008,
発表場所：University of Texas at
Arlington, USA

〔図書〕(計1件)

[1] 西原 健二, 半線形消散型波動方程式の
Cauchy 問題の解の時間大域的漸近挙動,

大学院 GP 数学レクチャーノートシリー
ズ(東北大学大学院理学研究科), 2009年
10月.(46ページ)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西原 健二 (NISHIHARA KENJI)
早稲田大学・政治経済学術院・教授
研究者番号：60141876