

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月10日現在

機関番号：37111
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2008～2011
 課題番号：20540222
 研究課題名（和文） 非有界作用素環の構造と表現
 研究課題名（英文） Structure and representation of unbounded operator algebras
 研究代表者
 井上 淳（INOUE ATSUSHI）
 福岡大学・理学部・教授
 研究者番号：50078557

研究成果の概要（和文）：
 井上、M. Fragoulopoulou(アテネ大)は「テンソル積*-代数の well-behaved *-表現」、井上、F. Bagarello (パレルモ大)、M. Fragoulopoulou, C. Trapani (パレルモ大) は「Quasi C*-代数の構造」、井上、S.J. Bhatt (パーテル・サダール大), 荻は「C*-代数の非可換微分構造」、井上、M. Fragoulopoulou, K.D. Kuersten (ライプチヒ大) は「非有界作用素環のクロス積」の研究をすすめた。

研究成果の概要（英文）：
 Inoue and M. Fragoulopoulou (Athens Univ.) studied “Well-behaved *-representations of tensor *-algebras”, Inoue, F. Bagarello (Palermo Univ.), M. Fragoulopoulou and C. Trapani (Palermo Univ.) studied “the structure of quasi C*-algebras”, Inoue and S.J. Bhatt (Patel Sadar Univ.), Ogi studied “the noncommutative differential structure of C*-algebras” and Inoue, M. Fragoulopoulou and and K. D. Kuersten (Leipzig Univ.) proceeded the study of “crossed products of unbounded operator algebras”.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非有界*-表現、C*-代数、非可換微分構造、O*-代数、部分O*-代数

1. 研究開始当初の背景

(1) 井上、S.J. Bhatt, M. Fragoulopoulou は*-代数の非有界 C*-セミノルムの系統的研究をすすめていた。その研究の局所凸*-代数の構造論、表現論への応用を考えていた。

(2) $A[\|\cdot\|]$ を C*-normed 代数、 τ を $A[\tau]$

が局所凸*-代数となる位相で、C*-ノルム位相より弱い位相とする。井上、Fragoulopoulou, Kuersten は局所凸*-代数 $A[\tau]$ の積が両側連続の場合、 $A[\tau]$ の完備化 $\bar{A}[\tau]$ の構造を調べた。 $A[\tau]$ の積が両側連続でないときの $\bar{A}[\tau]$ の構造を調べる事が課題だった。

(3) 非有界作用素環に対するクロス積は“domain problem”等により定義すらできていない状況だった。井上, Fragoulopoulou, Kuersten は非有界作用素環のクロス積を定義し、それを GW^* -代数の構造に応用することを考えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は非有界作用素環(O^* -代数, partial O^* -代数)の構造論と表現論についての研究をすすめることである。

ヒルベルト空間上の準閉作用素のつくる $*$ -代数(O^* -代数)は純粋に数学的な立場だけでなく量子物理への応用の面からも重要であり、多くの数学者、物理数学者により研究されている。もちろん、多くの未解決な問題がある。そのなかで、

- (1) Well-behaved $*$ -表現
- (2) Quasi C^* -normed 代数
- (3) C^* -代数の非可換微分構造
- (4) 非有界作用素環のクロス積の研究をすすめることが我々の目的である。

3. 研究の方法

井上は

- (1) well-behaved $*$ -表現の研究を, M. Fragoulopoulou と
- (2) Quasi C^* -normed 代数の研究を Bagarello, Fragoulopoulou, C. Trapani と
- (3) C^* -代数の非可換微分構造の研究を Bhatt, 荻と
- (4) 非有界作用素のクロス積の研究を Fragoulopoulou, Kuersten と通常は電子メールで情報交換を行いすすめた。また、井上はアテネ大, パレルモ大, ライプチヒ大を訪れ、共同研究者(Bagarello, Fragoulopoulou, Kuersten, Trapani) は福岡大学を訪れ共同研究をすすめた。

4. 研究成果

- (1) Well-behaved $*$ -表現の研究.
通常、非有界 $*$ -表現は有界 $*$ -表現では現れない病的なことがおこる。このため、病的な現象がおこらない “nice” $*$ -表現とは何かを考え調べるのが重要となる。もちろん “nice” $*$ -表現は $*$ -代数に依存する。S. J. Bhatt (Sardar Patel 大), 井上, 荻は非有界 C^* -セミノルムから非有界 $*$ -表現のクラスを構成し、そのクラスの中で “nice” な $*$ -表現 (well-behaved $*$ -表現とよぶ) とは何かを考え調べた (Unbounded C^* -seminorms and unbounded O^* -spectral algebras, J. Operator Theory 45 (2001), 53-80)。井上,

Bhatt, M. Fragoulopoulou(アテネ大)は(局所凸) $*$ -代数の非有界 C^* -セミノルムの系統的研究をすすめ、局所凸 $*$ -代数の構造論、表現論、非有界作用素環の研究を発展させた。さらに、井上, Fragoulopoulou はテンソル積 $*$ -代数の well-behaved $*$ -表現について研究した。

- (2) Quasi C^* -normed 代数の研究
 $A[\|\cdot\|]$ を C^* -normed 代数、 τ を $A[\tau]$ が局所凸 $*$ -代数となる位相で、 C^* -ノルム位相より弱い場合を考える。

局所凸 $*$ -代数 $A[\tau]$ の積が両側連続の場合、Fragoulopoulou, 井上, K.D. Kuersten (ライプチヒ大) は C^* -代数 $\bar{A}[\|\cdot\|]$ の単位球の τ -閉包 B_τ を調べることにより、 $A[\tau]$ の完備化はAllanの GB^* -代数であることを示した。

局所凸 $*$ -代数 $A[\tau]$ の積が両側連続でない場合、 $A[\tau]$ の完備化 $\bar{A}[\tau]$ は一般に quasi $*$ -代数で $*$ -代数とはならない。この構造は複雑となる。

F. Bagarello (パレルモ大), Fragoulopoulou, 井上, C. Trapani (パレルモ大) はまず C^* -代数の quasi $*$ -代数への自然な一般化 (quasi C^* -代数とよぶ) とは何かを考え、その構造を調べた(雑誌論文9)。

非有界作用素のつくる quasi C^* -代数、quasi C^* -代数の量子物理への応用を考えると、 C^* -normed 代数の quasi $*$ -代数への一般化である quasi C^* -normed 代数を考える必要があることがわかった。Fragoulopoulou, 井上はこの quasi C^* -normed 代数の構造と表現について研究した(雑誌論文5)。

- (3) C^* -代数の非可換微分構造の研究.
Blackadar と Cuntz は differential seminorm の概念を定義し、 C^* -代数の非可換微分構造を調べた (B. Blackadar and J. Cuntz, Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C^* -algebras, J. Operator Theory 26(1991), 255-282)。彼らによって定義された differential seminorm は ℓ^1 -summable を仮定しているが、Bhatt, 井上, 荻はこの仮定なしで C^* -代数の非可換微分構造 (smooth subalgebra のスペクトラル不変性、functional calculus、 K -理論不変性等) を調べた(雑誌論文3)。また、井上と Bhatt は非可換微分幾何に表れる Arveson の極限代数、Connes の極限代数の構造を調べた(雑誌論文8)。

- (4) 非有界作用素環のクロス積の研究.
作用素環 (von Neumann 代数, C^* -代数) は作用素環の構造 (双対定理, 分類定理等) に重要な役割をしている。非有界作用素環に対す

るクロス積は“domain problem”等により今まで定義すらできていない。井上, M. Fragoulopoulou と K-D. Kuersten (ライブチヒ大) は O^* -代数のクロス積を定義し, O^* -代数の構造の研究をすすめている。M を Hilbert 空間 H の稠密な部分空間 D 上の O^* -代数、G を局所コンパクト群、 α を G の M 上の action とする。次の step で研究をすすめている。Step 1. O^* -クロス積 $O^*(M, G, \alpha)$ 、 GW^* -クロス積 $GW^*(M, G, \alpha)$ が定義できる Hilbert 空間 $L^2(G, H)$ の稠密な部分空間 $D(M, G, \alpha)$ をさがす。

Step 2. G が可換なとき、 $GW^*(M, G, \alpha)$ の双対定理を考える。

この研究に必要な GW^* -代数のテンソル積の研究をすすめる(雑誌論文2) 我々の次の予想を解決した。「G の双対群 \hat{G} の $GW^*(M, G, \alpha)$ の action θ が定義でき、 $GW^*(GW^*(M, G, \alpha), \hat{G}, \theta)$ が M から生成される von Neumann 代数と $B(L^2(G))$ による GW^* -テンソル積と同型になる」

(5) 井上, Bagarello, Trapani は reduced O^* -代数とその条件付確率について研究した。フォン・ノイマン代数の非有界一般化である GW^* -代数の reduction は GW^* -代数とは限らない。どのような条件のもとで GW^* -代数となるかを考え、 GW^* -代数の domain D が自己共役作用素 T で定義されるとき GW^* -代数の reduction は GW^* -代数となることを証明した。また、この結果を O^* -代数の条件付期待値の存在性の解析へ応用した(雑誌論文6)。

(6) 井上, F. Bagarello と C. Trapni は量子物理で考えられている commutation relation の一般化である weak commutation relations の概念を定義し、それらのスペクトル等进行研究した(雑誌論文1)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

1. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani, Weak commutation relations of unbounded operators and applications, to appear in J. Mathematical Physics 査読有
2. M. Fragoulopoulou, A. Inoue and M. Weigt, Tensor products of unbounded operator algebras, to appear in Rocky Moun. J. Math. 査読有

3. S-J. Bhatt, A. Inoue and H. Ogi, Differential structures in C^* -algebras, J. Operator Theory, 査読有, 66 巻, 2011, 301-334

4. M. Fragoulopoulou, A. Inoue and K.D. Kürsten, Old and new results on Allan's GB^* -algebras, Banach Center Publications, 査読有, 91 巻, 2010, pp.169-178

5. F. Bagarello, M. Fragoulopoulou, A. Inoue and C. Trapani Locally convex quasi C^* -normed algebras, J. Math. Anal. Appl. 査読有, 366 巻, 2010, pp.593-606

6. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani, Bicommutants of reduced unbounded operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 査読有, 137 巻, 2009, pp.3709-3716

7. F. Bagarello, A. Inoue and C. Trapani, Representations and derivations of quasi $*$ -algebras induced by local modifications of states, J. Math. Anal. Appl., 査読有 356 巻, 2009, 615-623

8. S. J. Bhatt and A. Inoue, Limit algebras of differential forms in non-commutative geometry, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci., 査読有, 118 巻, 2008, 425-441

9. F. Bagarello, M. Fragoulopoulou, A. Inoue and C. Trapani, Structure of locally convex quasi C^* -algebras, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 60 巻, 2008, 511-549

[学会発表] (計0件)

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

井上 淳 (INOUE ATSUSHI)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号：50078557

(2) 研究分担者

黒瀬 秀樹 (KUROSE HIDEKI)
福岡大学・理学部・教授
研究者番号：00161795
太田 昇一 (ÔTA SHOICHI)
九州大学・大学院芸術工学研究科・教授
研究者番号：70107176
(H20～H22 研究分担者)
荻 秀和 (OGI HIDEKAZU)
福岡工業大学・工学部・教授
研究者番号：30248471
高倉 真由美 (TAKAKURA MAYUMI)
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：40268975
(H21～ 研究分担者)

(3) 連携研究者

()

研究者番号：