

機関番号：12611

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2008 ～ 2010

課題番号：20540365

研究課題名（和文）

可解格子模型の無限次元対称性と有限サイズ量子多体系における様々な物理的応用

研究課題名（英文） Infinite-dimensional symmetry of exactly solvable models and various physical applications in the finite-size quantum many-body systems

研究代表者 出口 哲生 (DEGUCHI TETSUO)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学研究科・教授

研究者番号：70227544

研究成果の概要（和文）：

可解格子模型に内在する無限次元対称性を応用して、有限サイズ可解量子多体系の様々な物理的性質を解明した。例えば、量子XXZ鎖において q が1の冪根のとき、 $sl(2)$ ループ代数という無限次元リー環が出現する。これを用いて超可積分カイラル・ポッツ模型の固有状態空間を特徴づけ、固有ベクトルを導く新しい方法を示した。アファイン量子群の非対称なR行列を用いて、非常に大きい有限長の可解高次スピン量子XXZ鎖における相関関数の多重積分表示を厳密に導いた。

研究成果の概要（英文）：

Applying the infinite-dimensional symmetries of quantum integrable systems, we derive exactly various interesting physical properties of large but finite-size quantum integrable systems. For instance, through the $sl(2)$ loop algebra, which is an infinite-dimensional Lie algebra appearing in the XXZ spin chain when q is a root of unity, we classify the Hilbert space of the super-integrable chiral Potts model and derive the eigenvectors, explicitly. Making use of the asymmetric R-matrix of the XXZ spin chain, we derived the multiple-integral representations of arbitrary correlation functions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理

キーワード：可積分系、数理物理、無限次元対称性、ベータ仮説、量子XXZ鎖、可解な高次スピン量子スピン鎖、相関関数、1次元デルタ関数型相互作用ボソン

1. 研究開始当初の背景

(1) 厳密に解ける格子模型において、無限次元リー代数など、無限次元の対称性が存在することが明らかにされた。周期的境界条件下の量子XXZ鎖では、量子群の q 変数が1の冪根のとき、 $sl(2)$ ループ代数という無限次元リー代数の対称性が成り立つ。

(2) 両端の開いた可解量子スピン鎖において、境界磁場などがある臨界値を越えると、境界束縛状態という新しい固有状態が出現する。これは可解性を保ったまま、系の対称性が変化するために出現する。系の対称性に伴うベータ解の変化は数理物理として興味深いだけでなく、実験でも実現可能性がある。

2. 研究の目的

(1) 可解模型に内在する無限次元対称性を積極的に応用して、可解格子模型の解法を定式化し、新しい物理量を求めること。具体的には、高次スピン量子 XXZ 鎖の場合には、相関関数の多重積分表示などを求める。

(2) 可解模型の対称性の変化に伴う新しいベータ固有状態の出現を調べること。系の状態変化としては、境界束縛状態などの他、回転する冷却原子系など、有限の角運動量をもつ状態 (Yrast 状態) を解析することも興味深い。

(3) 有限サイズの可解量子系の基底エネルギーや励起スペクトルを解析して、様々な物理的応用を議論すること。さらに、有限サイズスケーリングの解析は、将来、スペクトル関数などを計算するための基礎となる。

3. 研究の方法

(1) 代数的ベータ仮設法と量子逆散乱問題 (QISP) の公式

代数的ベータ仮設法を用いて、可解な高次スピン量子 XXZ 鎖など、可解量子スピン鎖のハミルトニアン固有状態を、厳密に導くことができる。さらに、量子逆散乱問題 (Quantum Inverse Scattering Problem) の公式を応用して、局所演算子を代数的ベータ仮設法の生成・消滅演算子を用いて表すことができる。この方法により、形状因子などが厳密に求められる。

さらに、量子 XXZ 鎖など限られた模型ではあるが、スラブノフによるスカラー積の公式が与えられている。これらを組み合わせることにより、量子 XXZ 鎖に対しては、任意の相関関数の多重積分表示を導くことができる。この結果を高次スピン XXZ 鎖に拡張する。

(2) ベータ仮設方程式の数値解法と量子スピンハミルトニアンの数値対角化

ベータ仮設方程式の解を数値的に求め、境界束縛状態など、新しい固有状態を探索する。ベータ方程式の解を求めることは、実数解の場合には比較的容易であるが、複素解の場合には、かなり困難と予想されていた。我々は、解析的接続をきちんと定式化することにより、複素解も導くことが可能であることを示した。

量子スピン系のハミルトニアンを数値的に対角化することにより、エネルギースペクトルを正確に求め、この値とベータ仮設方

程の数値解から導かれる固有値の値を比較することにより、数値的な精度を検証することができる。

(3) 可解量子スピン鎖の基底エネルギーの有限サイズスケーリング

非常に大きい有限長の 1 次元格子の上で定義された量子スピン鎖に対して、その基底状態のエネルギーをシステムサイズの逆べきで展開することができる。オイラー・マクローリン展開を用いる。その補正項から、共形次元など、絶対零度で実現する臨界状態の特徴を明らかにすることができる。

4. 研究成果

(1) 超可積分カイラル・ポッツ模型の固有状態空間の構築と $sl(2)$ ループ代数

可積分カイラル・ポッツ模型 (SCP 模型) は 2 次元イジング模型を拡張する多状態可解格子模型である。その転送行列は、特に超可積分な場合、高次スピン量子 XXZ 鎖の L 行列と q 変数が 1 の冪根のとき交換する。

この事実に基づいて、 q が 1 の冪根のとき、高次スピン量子 XXZ 鎖の固有ベクトルが SCP 模型のイジング的固有値に対応する固有空間を生成することを明らかにした。さらに全スピン角運動量演算子の z 成分 S_z の固有値が N の倍数となるセクターにおいて、高次スピン量子 XXZ 鎖が $sl(2)$ ループ代数の対称性を持つことを証明し、ループ代数の縮退空間がイジング的固有値に対応する固有空間であることを示した。(A. Nishino and T. D., J. Stat. Phys. 133 (2008).)

(2) 可積分な高次スピン量子 XXZ 鎖の形状因子と相関関数の多重積分表示

リヨングループの量子 $XXXZ$ 鎖の相関関数の方法を発展させ、可解な高次スピン XXZ 鎖の量子逆散乱問題を解き、6 頂点模型の合成模型に対するベータ固有状態のスカラー積の公式を、fusion の方法を用いて導いた。そして可積分な高次スピン XXZ 鎖の形状因子の公式を導き、一般のスピンの場合に求めた。(T. D. and C. Matsui, Nucl. Phys. B 814[FS] (2009); Nucl. Phys. B 851 (2011))

さらに、量子 XXZ 鎖のギャップレス領域において、絶対零度における相関関数 (EFP) の多重積分表示を導いた。これを拡張して、高次スピンの任意の演算子の積に対する相関関数の多重積分表示を厳密に求めた。(T.D. and C. Matsui, Nucl. Phys. B 831[FS] (2010))

(3) 可解な高次スピン量子XXZ鎖のギャップ領域の相関関数の数値評価

スピン1のXXZ鎖の1点関数に対してその多重積分表示を導き、積分を解析的に計算して1点関数の解析的表式を得た。一方、スピン1のXXZハミルトニアンを数値的に対角化して基底状態固有ベクトルを求め、これを用いてスピン1の一点関数を数値的に求めた。両者を比較したところ、非常に良い一致をみた。この結果は相関関数の多重積分表示の結果を裏付ける。(T. D. and J. Sato, SIGMA Vol. 7 (2011))

(4) 可解な高次スピン量子XXZ鎖のギャップ領域における相関関数の多重積分表示

可解な高次スピンXXZ鎖のギャップ領域において、任意の演算子積に対応する相関関数の多重積分表示を、厳密に解析的に導出した。多重積分表示は楕円関数で表された。

多重積分表示を導くために、可解な高次スピン量子XXZ鎖の基底状態を与えるストリング解を、ベータ方程式を数値的に解いて求めた。完全ストリングからのずれはマスの場合と同様であり、ストリングの幅が広がる方向にずれる。この完全ストリングからのずれは多重積分表示において重要であり、積分の中の極を与える。(佐藤純氏および茂木康平氏との共同研究、T.D., K. Motegi, and J. Sato, in preparation)

基底状態のベータ解が、ストリング解という複素解で与えられた。ギャップの場合にストリング解を求めることは従来から困難な課題として知られていた。

(5) 様々な物理的応用例I: PT対称性な物理系の厳密解

非エルミートな量子ハミルトニアンであっても、PT対称性であればその固有値は全て実数であることが知られている。横磁場イジング模型を拡張して、PT対称な厳密解の様々な実例を導いた。(T.D. and P.K. Ghosh, J. Phys. A: (2009))

(6) 様々な物理的応用例II: トーラスに閉じ込められた回転する冷却原子気体のYrast励起スペクトルの厳密な導出

トーラスに閉じ込められた回転する冷却原子系を表す理論模型として、デルタ関数型の相互作用をするボース気体を採用し、角運動量一定の条件下での励起状態のスペクトルを解明した。

与えられた角運動量を持つ最低エネルギー

一の固有状態をYrast状態とよび、与えられた角運動量を持つ励起状態をYrast励起状態と呼ぶ。有限サイズ効果の方法を適用して、Yrast励起状態を厳密に求めた。有限サイズスケーリングの方法を用いて Yrast エネルギーを展開し、dressed energy を用いて厳密に解析した。

有限サイズスケーリングの一つの帰結として、全運動量が粒子数Nの整数倍に比例するとき、共形場理論の方法が適用できることが明らかになった。

(7) 1次元相関電子系の密度行列繰り込み群の解析と可解模型

両端の開いた1次元ハバード鎖において境界格子点における束縛状態の解を求め、これと原研の奥村雅彦氏による密度行列繰り込み群の密度分布のデータとを比較した。

(奥村雅彦氏との共同研究。参考文献: M. Machida, et al., Phys. Rev. B 78 (2008))

(8) アファイン量子群から導かれる様々な可解模型のR行列の導出と形状因子公式

可積分高次スピン量子XXZ鎖やqの1の冪根表現に対応する色つき模型など、アファイン量子群から導かれる可解模型のR行列を明示的に表すを与えた。さらにその模型の形状因子を、代数的ベータ仮設法を用いて厳密に計算する方法を定式化した。(T.D. and K. Motegi, in preparation)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11件)

[1] T. Deguchi and J. Sato, Quantum group $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ symmetry and explicit evaluation of the one-point functions of the integrable spin-1 XXZ spin chain, SIGMA Vol. 7 (2011), 056 (41 pages).

(査読有)

[2] T. Deguchi and C. Matsui, Erratum to 'Form factors of integrable higher-spin XXZ chains and the affine quantum-group symmetry' [Nucl. Phys. B 814 (2009) 405-438], Nucl. Phys. B851 (2011) 238-243.

(査読有)

[3] E. Kaminishi, R. Kanamoto, J. Sato and T. Deguchi, Exact Yrast Spectra of Cold Atoms on a Ring, Phys. Rev. A. Vol. 83, 031601 (R) (2011). (査読有)

[4] T. Deguchi and C. Matsui, Correlation functions of the integrable higher-spin XXX and XXZ spin chains through the fusion method, Nucl. Phys. B Vol. 831[FS] (2010) 359-407. (査読有)

[5] T. Deguchi and P. K. Ghosh, Exactly Solvable Quasi-hermitian Transverse Ising Model, J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 42 (2009) 475208 (10 pages). (査読有)

[6] T. Deguchi, P. K. Ghosh and K. Kudo, Level statistics of a pseudo-hermitian Dike model, Phys. Rev. E Vol. 80, 026213 (2009). (査読有)

[7] T. Deguchi and P.K. Ghosh, Quantum Phase Transition in a Pseudo-hermitian Dicke model, Phys. Rev. E Vol. 80, 021107 (2009) (査読有)

[8] T. Deguchi and C. Matsui, Form factors of integrable higher-spin XXZ chains and the affine quantum-group symmetry, Nucl. Phys. B Vol. 814 [FS] (2009) 405-438 (査読有)

[9] M. Machida, M. Okumura, S. Yamada, T. Deguchi, Y. Ohashi and H. Matsumoto, Mott Phase in Polarized Two-component Atomic Fermi Lattice Gas: A Playground for $S=1/2$ Heisenberg Model in Magnetic Field, Phys. Rev. B Vol. 78, 235117 (2008). (査読有)

[10] A. Nishino and T. Deguchi, An algebraic derivation of the eigenspaces associated with an Ising-like spectrum of the superintegrable chiral Potts model, J. Stat. Phys. Vol. 133 (2008) pp. 587--615 (査読有)

他 1 件 (査読有)

[学会発表] (計 46 件) (招待講演 8 件)

[1] 出口哲生, 可積分高次スピン XXZ 鎖と超可解カイラルポッツ鎖の量子逆散乱問題 (26p TC-1、講演発表 2011 年 3 月 26 日) 日本物理学会第 66 回年次大会 新潟大学五十嵐キャンパス 2011 年 3 月 25 日-28 日

[2] 上西慧理子、金本理奈、佐藤純、出口哲生、Lieb-Liniger 模型のホール励起における有限サイズスケールリング (26p TC-4、講演

発表 3 月 26 日) 日本物理学会第 66 回年次大会 新潟大学五十嵐キャンパス 2011 年 3 月 25 日-28 日

[3] 山川幸恵、佐藤純、出口哲生、XXZ 鎖のストリング解の漸近挙動 (26p TC-3、講演発表 3 月 26 日) 日本物理学会第 66 回年次大会 新潟大学五十嵐キャンパス 2011 年 3 月 25 日-28 日

[4] 渡邊隆子、出口哲生、可解量子スピン模型とループ代数の有限次元最高ウェイト表現 (26p TC-2、講演発表年 3 月 26 日) 日本物理学会第 66 回年次大会 新潟大学五十嵐キャンパス 2011 年 3 月 25 日-28 日

[5] 佐藤純、金本理奈、上西慧理子、出口哲生、Lieb-Liniger 模型におけるホール励起の二体密度動的相関関数 (26a RA-2、講演発表 3 月 26 日) 日本物理学会第 66 回年次大会 新潟大学五十嵐キャンパス 2011 年 3 月 25 日-28 日

[7] 出口哲生、XXZ 鎖のループ代数対称性と超可積分カイラルポッツ模型の量子逆散乱問題 (講演発表 2011 年 3 月 21 日) 日本数学会 早稲田大学理工学部 2011 年 3 月 20 日-23 日

[8] 渡邊隆子、出口哲生、 $sl(2)$ ループ代数の可約な有限次元最高ウェイト表現の具体的構成 (講演発表 2011 年 3 月 23 日) 日本数学会 早稲田大学理工学部 2011 年 3 月 20 日-23 日

[9] 佐藤純、出口哲生、可積分高次スピン XXZ 鎖の相関関数を表す多重積分の厳密評価 (26aTH-8、講演発表 2010 年 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[10] 出口哲生、超可積分カイラル・ポッツ模型に対応する量子逆散乱問題 (26aTH-5、講演発表 2010 年 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[11] 渡邊隆子、出口哲生、可解量子スピン模型への応用に向けたループ代数の有限次元最高ウェイト表現の研究 (26aTH-3、講演発表 2010 年 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[12] 山川幸恵、佐藤純、出口哲生、XXZ 鎖におけるストリング仮説とベータ状態の完全性の検証 (26aTH-2、講演発表 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[13] 池田唯、佐藤純、出口哲生、境界磁場下における開放端 XY 模型の磁化プロファイルと相関関数 (26aTH-1、講演発表 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[14] 上西慧理子、金本理奈、出口哲生、リング上の冷却原子系の厳密な Yrast スペクトル、(26aRD2、講演発表 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[15] 佐藤純、上西慧理子、金本理奈、出口哲生、リング上で回転するボソン系のスペクトル関数のベータ仮説による解析、(26aRD1、講演発表 9 月 26 日) 日本物理学会 2010 年秋季大会 大阪府立大学中百舌鳥キャンパス 2010 年 9 月 23 日-26 日

[16] (講演発表) T. Deguchi, Quantum inverse scattering problem of the superintegrable chiral Potts model and correlation functions through the $sl(2)$ loop algebra, XXIV IUPAP International Conference on Statistical Physics (StatPhys24), the Cairns Convention Centre on 19-23 July 2010. (Talk was given on 23 July.)

[17] (招待講演) T. Deguchi, The $sl(2)$ loop algebra and the superintegrable chiral Potts model, "Exactly Solvable Models in Statistical Physics", The University of Queensland, Australia, July 14- 17 2010. (The talk was given on 16 July.)

[18] (招待講演) T. Deguchi, Correlation functions of the integrable spin- s XXZ spin chains and some related topics, Recent Advances in Quantum Integrable Systems (RAQIS '10), June 15-18, 2010, LAPTH, Annecy, France. (Talk was given on 15 June.)

[19] 茂木康平、出口哲生、量子アフィン代数 $U_q(\hat{sl}(2))$ に付随する可解スピン Hamiltonian の Hermite 演算子としての実現、日本数学会 無限可積分系セッション、

慶応大学矢上キャンパス、2010年3月24日~28日 (講演は3月27日)

[20] 出口哲生、松井千尋、可解高次スピン XXZ 鎖の任意の相関関数: ギャップレスの場合、Correlation functions of integrable higher-spin XXZ chains for arbitrary matrix elements: massless regime、日本数学会 無限可積分系セッション、慶応大学矢上キャンパス、2010年3月24日~28日 (講演は3月27日)

[21] 出口哲生、多状態可積分量子スピン系の有限鎖の相関関数と形状因子、(21pEH-5、講演発表 3月21日) 日本物理学会第65回年次大会 岡山大学 2010年3月20日-23日

[22] 茂木康平、出口哲生、量子アフィン代数の高次元表現に付随する可解模型の構成、(21pEH-2、講演発表 3月21日) 日本物理学会第65回年次大会 岡山大学 2010年3月20日-23日

[23] 上西慧理子、出口哲生、金本理奈、1次元ベータ仮説法を用いた Yrast 励起状態の解析、(21pTB11、講演発表 3月21日) 日本物理学会第65回年次大会 岡山大学 2010年3月20日-23日

[24] (招待講演) T. Deguchi, The $sl(2)$ loop algebra symmetry of the XXZ spin chain at roots of unity and applications to the superintegrable chiral Potts model, Simons Center for Geometry and Physics Workshop on Correlation Functions for Integrable Models 2010, January 18-22, 2010, Stony Brook University, NY, USA (Talk was given on Jan. 18, 2010)

[25] (招待講演) T. Deguchi, Correlation functions of the integrable higher-spin XXZ spin chain, Simons Center for Geometry and Physics Workshop on Correlation Functions for Integrable Models 2010, January 18-22, 2010, Stony Brook University, NY, USA (Talk was given on Jan. 18, 2010)

[26] (招待講演) T. Deguchi, Correlation functions of the integrable spin- s XXZ spin chain via fusion method, in the conference "New Trends in Quantum Integrable Systems (Infinite Analysis 09)", Kyoto University, July 27-31, 2009. (Talk was given on Jul. 27, 2009.)

[27] 上西慧理子、出口哲生、金本理奈、
回転するトラスに閉じ込められた冷却原子
気体のベータ仮設解、(25pZE-8、講演発表
9月25日)日本物理学会2009年秋季大会 熊
本大学 2009年9月25日-28日

[28] 上西慧理子、出口哲生、金本理奈、
回転するトラスに閉じ込められた冷却原子
気体の厳密解と固有スペクトル、
(27aQC-8、講演発表 9月27日)
日本物理学会2009年秋季大会 熊本大学
2009年9月25日-28日

[29] 出口哲生、P. K. Ghosh、
準エルミートな1次元横磁場イジング模型
の厳密解と相関関数、(27aQC-9、講演発表 9
月27日)日本物理学会2009年秋季大会
熊本大学 2009年9月25日-28日

[30] 出口哲生、可積分高次スピン XXZ 鎖
および XXZ 鎖の相関関数の二つの計算方
法について、(27aQC-10、講演発表 9月27
日)日本物理学会2009年秋季大会
熊本大学 2009年9月25日-28日

[31] 工藤和恵、P. K. Ghosh、出口哲生、
擬エルミート Dicke 模型の準位統計、
(27pQC、講演発表 9月27日)
日本物理学会2009年秋季大会 熊本大学
2009年9月25日-28日

[32] 秦はるひ、出口哲生、オンサーガー代
数の表現と最小多項式について、(30aTK3、
講演発表 3月30日)日本物理学会第64回
年次大会 立教大学 2009年3月27日-30日

[33] 出口哲生、松井千尋、可積分高次スピ
ン XXZ 鎖の形状因子に対する二つの公式
(30aTK4、講演発表 3月30日)、日本物理学
会第64回年次大会 立教大学2009年3月27
日-30日

[34] (招待講演) T. Deguchi,
Form factors of integrable higher-spin XXZ
chains and the affine quantum-group
symmetry, Workshop on the chiral Potts
model, Kioloa, NSW, Australia, December
7-11, 2008 (Talk was given on Dec. 9,
2008.)

[35] (招待講演) T. Deguchi,
The $sl(2)$ loop algebra symmetry of the XXZ
spin chain at roots of unity and some
applications (July 24, 2008), Aspects of
Quantum Integrability, July 24-25, 2008,

YITP, Kyoto Univ.

[36] (招待講演) T. Deguchi,
The $sl(2)$ loop algebra symmetry of the
 XXZ spin chain at roots of unity,
correlation functions of the
higher-spin XXZ spin chains and their
applications to the superintegrable
chiral Potts model (July 16, 2008),
Sigma Phi 2008, July 14-18, 2008,
Orthodox Academy of Crete, Crete,
Greece.

[37] 松井千尋、出口哲生、可積分高次スピ
ン XXZ 鎖における量子逆散乱、
(22aVD 10、講演発表9月22日)
日本物理学会2008年秋季大会 岩手大
学上田キャンパス 2008年9月20日-23日

[38] 出口哲生、
ループ代数と可積分高次スピン XXZ 鎖、
(22aVD 11、講演発表9月22日)
日本物理学会2008年秋季大会 岩手大
学上田キャンパス 2008年9月20日-23日

[39] 松井千尋、出口哲生、
可解高次スピン XXZ 鎖の相関関数
(22aVD 11、講演発表9月22日)
日本物理学会2008年秋季大会 岩手大
学上田キャンパス 2008年9月20日-23日

[40] 松井千尋、出口哲生、Correlation
functions of integrable higher-spin XXZ
chains and the quantum inverse scattering
problem 日本数学会秋季総合分科会 無限
可積分系セッション、東京工業大学、200
8年9月24日~27日(講演は9月24日)

[41] 出口哲生、The $sl(2)$ loop algebra
symmetry of the XXZ spin chain at roots of
unity, 日本数学会秋季総合分科会 無限可
積分系セッション、東京工業大学、2008
年9月24日~27日(講演は9月24日)

他、国際会議におけるポスター発表 5件

6. 研究組織

(1) 研究代表者

出口 哲生 (DEGUCHI TETSUO)

お茶の水女子大学・大学院人間文化創成科学
研究科・教授

研究者番号：70227544

(2) 研究分担者

なし