

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 5日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2008～2012

課題番号：20540372

研究課題名（和文）

ランダム行列の普遍性と半古典量子論

研究課題名（英文）

Universality of Random Matrices and Semiclassical Quantum Theory

研究代表者

永尾 太郎 (NAGAO TARO)

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：10263196

研究成果の概要（和文）：実非対称ランダム行列と実対称ランダム行列を連続的に結ぶ行列アンサンブルの固有値相関関数を評価し、行列のサイズが大きい極限における漸近的な振る舞いを導いた。また、量子カオス系に対して半古典的なダイアグラム展開の方法を適用して、普遍的な性質を再現した。さらに、複雑ネットワークの理論にランダム行列の方法を適用し、平均次数が大きい極限では、ネットワークを記述する行列の固有値密度を解析的に評価できることを示した。

研究成果の概要（英文）：The eigenvalue correlation functions for the matrix ensemble continuously interpolating between the asymmetric real and symmetric real random matrices were evaluated and the asymptotic behavior in the limit of large matrix dimension was derived. The method of semiclassical diagrammatic expansion was applied to classically chaotic quantum systems and the universal properties were reproduced. The random matrix methods were applied to the theory of complex networks and the eigenvalue densities of the matrices describing the networks were shown to be analytically evaluated in the limit of large average degree.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数理物理・物性基礎

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：ランダム行列、半古典量子論

1. 研究開始当初の背景

ランダム行列とは乱数を要素にもつ行列であり、その理論は数理統計学の分野において導入され、物理学に応用されて大きく発展した。物理学への応用としては、量子系のエネルギー準位統計がよく知られている。エネルギー準位統計においては、ランダム行列の固有値によってエネルギー準位がモデル化さ

れる。対象となる量子系は、原子核、メソスコピック系、量子カオス系など多岐にわたる。エネルギー準位密度のゆらぎには、系の性質の詳細によらない普遍性があり、大きな行列サイズの極限においてランダム行列によって再現されることがわかっている。この普遍性によって、エネルギー準位統計に対して広くランダム行列を応用することが可能とな

った。量子カオス系は、カオス的な古典系に対応する量子系のことであり、ランダム行列の多くの応用の中でも特に興味深いものの一つである。量子カオス系の研究は、ランダム行列によって記述される普遍性が発見されたことにより、大きく進展した。数値計算によりエネルギー準位密度のゆらぎがランダム行列理論の予言に一致することが示されただけでなく、微細加工技術の発展によりメソスコピック物理の研究者による実験が可能になり、普遍性が実現されていることが確かめられた。このような状況の下、普遍性を半古典量子論に基づいて理論的に導出することが量子カオスの研究者の大きな目標となっていた。研究開始に先立ち、この問題の解決に向けて大きな進展があった。半古典量子論に基づいたダイアグラム展開の手法により、エネルギー準位の相関関数を系統的に評価する方法が、Sieber と Richter により発見されたことである。この方法は、Duisburg-Essen 大学のグループによって大きく発展させられ、ランダム行列理論の予言する普遍性の内のいくつかが導かれた。

一方、従来の物理学の枠組みを越えて、社会学、工学、生物学などへのランダム行列の応用も進展している。特に、インターネットの普及に刺激されて急速に発展してきた複雑ネットワークの理論においては、人間関係のネットワーク、送電線ネットワーク、生体内の化学反応のネットワークなど、現実的なネットワークに普遍的な構造を見出すことが求められている。複雑ネットワークの構造を定める隣接行列に対する単純なモデルは、1 または 0 の値を要素とする実対称ランダム行列によって与えられる。研究開始当初において、複雑ネットワークの隣接行列は、ランダム行列理論の一般化の観点から研究されるようになってきており、固有値分布に普遍性があることが明らかにされつつあった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、ランダム行列理論の応用において重要な普遍性の理解を深めることである。具体的には、以下のことを行う。ランダム行列の普遍性は様々なクラスに分類され、それぞれのクラスを特徴づける固有値相関関数が存在するが、それらの普遍性クラスの存在を明らかにし、対応する固有値あるいは固有ベクトルの相関関数を評価する手法を開発する。また、ランダム行列理論の予言が現実的な系において普遍的に実現される理由を明らかにするため、普遍性がどのような条件の下で成り立ち、どのような形で破れるのかを調べる。以上の目的を達成するため、行列サイズが大きい極限におけるランダム行列の振る舞いについて、直交多項式の方法などを用いて調べる。また、量子カオス系や

複雑ネットワークにおける普遍性の成り立ちを明らかにするために、半古典量子論や場の理論的な方法を用いた解析を進める。

3. 研究の方法

本研究においては、ランダム行列の普遍性の特徴を調べ、それらの普遍性が広い応用分野に適用される理由を明らかにするため、直交多項式の方法、場の理論的な方法、半古典量子論の方法など、主に数理物理学の手法を用いてランダム行列モデルおよび対応する物理系の解析を進める。直交多項式の方法とは、直交多項式の数理と行列式の性質などを用いて、厳密な代数的手法によりランダム行列の相関関数の評価を行う方法であり、研究代表者は、これまで主にこの方法により、ランダム行列の普遍性クラスの解析を行い、相関関数を評価してきた。場の理論的な方法は、従来は不純物を含む固体の物性などを解析するために用いられてきた。研究代表者は、この方法が、固体物理の範囲を越えて、ランダム行列理論における普遍性の破れ方を調べる上で一般的に役立つことに注目している。半古典量子論の方法は、古典周期軌道によって記述される跡公式を用いた量子カオス系の解析に使われてきたものであり、ダイアグラム展開の方法として最近急速に発展している。これらの手法によって導かれた結果と比較対照するデータを得るため、また、これらの手法がうまく適用できない場合を扱うために、数値解析の方法による研究も並行して進める。さらに、関連する分野の研究者との交流を深めることにより、新しい手法の開発も試みる。

4. 研究成果

実非対称行列のランダム行列アンサンブルについては、実固有値と複素固有値が共存する複雑な構造のため、固有値相関の扱いが困難であった。本研究においては、実非対称行列の非対称性の大きさをパラメータとするランダム行列アンサンブルについて、直交多項式の方法による解析を進めた。その結果、実非対称行列のアンサンブルと実対称行列のアンサンブルの間を結ぶ固有値相関関数の表式を得た。また、行列のサイズが大きい極限における固有値相関関数の漸近的な振る舞いを導くことにも成功した。さらに、ランダム行列理論の量子色力学 (QCD) への応用について考察し、カイラルガウス型アンサンブルとガウス型アンサンブルの間を連続的につなぐモデルについて研究を進めた。その結果、対応する歪直交多項式のコンパクトな表式を用いて、行列の次数が大きい極限における固有値相関関数の漸近形を評価することができた。

一方、量子カオス系に対して半古典的なダ

イアグラム展開の方法を適用して、普遍的な性質を再現する研究にも取り組んだ。ランダム行列理論の予言によれば、エネルギー準位の高次相関関数は、時間反転非対称な系については行列式の構造を、時間反転対称な系についてはパフィアンの構造をもつ。本研究では、時間反転非対称な系において、行列式の構造をもつ表式を半古典的に導出できた。さらに、時間反転対称な系のエネルギー準位相関関数を半古典的に評価し、エネルギー準位が互いに離れているときの漸近形については、ランダム行列理論の予言が再現されることを示した。

また、磁場の作用により量子系の時間反転対称性が破れる場合において、準位分布の普遍性クラス間の遷移が生じることに注目して、遷移を記述する相関関数を半古典的に評価した。この場合においても、対応するランダム行列モデルの結果と一致する相関関数の表式が導かれた。また、時間反転対称性が破れる場合において、エネルギー準位相関の普遍性が量子系の時間発展にどのように反映されるかを考察した。さらに、電子スピンの効果により普遍性クラス間の遷移が生じる場合を調べ、遷移領域における電気伝導を半古典的に記述した。

ランダム行列理論の方法は、インターネットや人間関係などのつながり方を記述すると考えられている複雑ネットワークの理論にも適用できる。特に、複雑ネットワークの隣接行列の固有値分布には、量子カオス系に対する半古典量子論から導かれるのと同様の普遍的なゆらぎなど、標準的なランダム行列の固有値分布と共通の特徴があることがわかっている。そのため、ランダム行列理論は複雑ネットワークを理解する上で有用であることが期待される。複雑ネットワークの特徴としては、次数（1つの頂点から出る辺の数）がべき分布する性質（スケールフリー性）が重要であることがよく知られている。本研究においては、複雑ネットワークの静的なモデルについて、隣接行列およびラプラシアン行列の固有値分布を調べた。その結果、平均次数が大きい極限では、場の理論的な方法（レプリカ法）により、固有値密度を解析的に評価できることが示された。

また、ネットワークの頂点が2つの種類に分類され、異なる頂点同士のみがつながる場合を考えた。それぞれの種類の頂点の次数分布は異なるが、いずれもべき分布になるモデルを構成し、その隣接行列およびラプラシアン行列の固有値分布を評価した。その結果、平均次数が大きい極限では、固有値分布の振る舞いを解析的に評価できた。特に、固有値分布のすそ野の部分については、べき分布が得られ、その指数と頂点の次数分布の指数と

の間の関係が明らかになった。さらに、平均次数が有限の場合の固有値分布を扱うための近似的な方法として、有効媒質近似を導入した。その結果、数値的に生成したネットワークに対する計算との比較により、平均次数が十分に大きい場合には、良い一致が得られることがわかった。また、固有値分布のすそ野の部分については、平均次数が小さい場合でも、良い一致が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計9件)

- (1) Taro Nagao, Spectral density of complex networks with two species of nodes, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 46 巻, 2013 年 065003
- (2) Heiner Kohler, Taro Nagao and Hans-Jürgen Stöckmann, Parametric correlations versus fidelity decay: the symmetry breaking case, Phys. Rev. E, 査読有, 84 巻, 2011 年, 061133
- (3) Gernot Akemann and Taro Nagao, Random matrix theory for the Hermitian Wilson Dirac operator and the chGUE-GUE transition, J. High Energy Phys., 査読有, 2011 巻, 2011 年, 60
- (4) Peter J. Forrester and Taro Nagao, Determinantal correlations for classical projection processes, J. Stat. Mech., 査読有, 2011 巻, 2011 年, P08011
- (5) Taro Nagao, Spectral correlation functions for chaotic systems, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, "Spectra of Random Operators and Related Topics" (ed. by N. Minami) 査読有, B27 巻, 2011 年, 99
- (6) Keiji Saito and Taro Nagao, Chaotic transport in the symmetry crossover regime with a spin-orbit interaction, Phys. Rev. B, 査読有, 82 巻, 2010 年, 125322
- (7) Keiji Saito, Taro Nagao, Sebastian Müller and Petr Braun, Semiclassical theory for universality in quantum chaos with symmetry crossover, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 42 巻, 2009 年, 495101
- (8) Taro Nagao and Sebastian Müller, The n -level spectral correlations for chaotic systems, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 42 巻, 2009 年, 375102
- (9) Peter J. Forrester and Taro Nagao, Skew orthogonal polynomials and the partly symmetric real Ginibre ensemble, J. Phys. A: Math. Theor., 査読有, 41 巻, 2008 年, 375003

[学会発表] (計 13 件)

(1) 永尾太郎, スケールフリーネットワークのスペクトル密度 III, 日本物理学会第 68 回年次大会, 平成 25 年 3 月 28 日, 広島大学

(2) Taro Nagao, Spectral density of bipartite scale-free networks, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題”, 平成 24 年 12 月 5 日, 京都大学

(3) 永尾太郎, 進化するランダム行列理論, 日本物理学会 2012 年秋季大会 シンポジウム「ランダム行列の過去・現在・未来」, 平成 24 年 9 月 21 日, 横浜国立大学

(4) Taro Nagao, Real asymmetric random matrices and skew orthogonal polynomials on the complex plane, International Symposium on Orthogonal Polynomials and Special Functions - a Complex Analytic Perspective, 2012 年 6 月 12 日, The Royal Danish Academy of Sciences and Letters

(5) 永尾太郎, スケールフリーネットワークのスペクトル密度 II, 日本物理学会第 67 回年次大会, 平成 24 年 3 月 26 日, 関西学院大学

(6) Taro Nagao, A two-matrix model describing the transition between chiral and non-chiral random matrices, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 平成 23 年 12 月 1 日, 京都大学

(7) 永尾太郎, スケールフリーネットワークのスペクトル密度, 日本物理学会 2011 年秋季大会, 平成 23 年 9 月 23 日, 富山大学

(8) 永尾太郎, スピン系の量子輸送と球面上のブラウン運動, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 平成 22 年 12 月 9 日, 慶應義塾大学

(9) 永尾太郎, 実非対称ランダム行列の固有値分布, 日本数学会 2010 年度秋季総合分科会, 平成 22 年 9 月 22 日, 名古屋大学

(10) Taro Nagao, Determinantal spectral correlations for chaotic systems, Spectra of Random Operators and Related Topics, 平成 21 年 12 月 3 日, 京都大学

(11) 永尾太郎, Spectral density of the adjacency matrices of complex networks, ランダム作用素のスペクトルと関連する話題, 平成 20 年 11 月 27 日, 京都大学

(12) Taro Nagao, Eigenvalue correlations for the real Ginibre ensemble, Workshop on “Random Matrices, Special Functions and Related Topics”, 平成 20 年 11 月 14 日, 京都大学

(13) Taro Nagao, Vicious walks and matrix models, Workshop “Random Tilings, Random

Partitions and Stochastic Growth Processes”, 2008 年 9 月 3 日, Université de Montréal

[図書] (計 1 件)

G.J. Rodgers and Taro Nagao, The Oxford Handbook of Random Matrix Theory, Oxford University Press, 2011 年, 898-911

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永尾 太郎 (NAGAO TARO)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号 : 10263196

(2) 研究分担者なし

(3) 連携研究者

楯 辰哉 (TATE TATSUYA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
研究者番号 : 00317299
齊藤 圭司 (SAITO KEIJI)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号 : 90312983