

機関番号：14501

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2008～2010

課題番号：20540424

研究課題名 (和文) 一般化された 2 次元流体における流れの安定性

研究課題名 (英文) Stability for flows in a generalized two-dimensional fluid

研究代表者

岩山 隆寛 (IWAYAMA TAKAHIRO)

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10284598

研究成果の概要 (和文)：地球流体力学で知られた複数の 2 次元流体系を統一的に記述できる一般化された 2 次元流体系において、平行流の安定性の研究を行った。支配方程式から波動活動度保存則を導き、また支配方程式を Hamilton 形式に書き下した。これらを利用して、平行流の安定の十分条件を導出した。さらに、一般化された 2 次元流体の Green 関数を導出した。Green 関数を用いて、一般化された 2 次元流体系は、系に含まれるスケール分離パラメータ α が 3 以下の場合が物理的に理にかなった系であること、乱流状態において一般化された渦度の小スケールにおける振る舞いの転移を説明した。

研究成果の概要 (英文)： Stability of parallel shear flows for a generalized two-dimensional (2D) fluid system, which is a unified form of some geophysical 2D fluid systems, is investigated. First, the conservation of the wave activity is derived. Second, it is shown that the governing equation for the generalized 2D fluid system can be written in the form of non canonical Hamiltonian form. Using them, a necessary condition for a linear stability of parallel shear flows is derived as: “if the transverse derivative of the generalized vorticity for the basic state is positive or negative definite, the flow is stable”. Moreover, the Green’s function for the generalized 2D fluid system is derived. Using the Green’s function, physically realizable systems for the generalized 2D fluid system exist only for $\forall \alpha$ less than or equal 3. Here, $\forall \alpha$ is a real parameter describing the scale separation between the generalized vorticity and the velocity. In addition, the transition of the small scale behavior of the generalized vorticity at $\alpha=2$, a well known property of forced and dissipated turbulence for the generalized 2D fluid, is explained in terms of the Green’s function.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：地球流体力学

科研費の分科・細目：気象・海洋・陸水学

キーワード：一般化された 2 次元流体, α 乱流系, 流れの安定性, Green 関数, Hamilton 構造

1. 研究開始当初の背景

地球の大気や海洋の大規模な運動は、地球

の自転と密度成層の影響によって水平 2 次元
的であることが知られている。そこで、地球

流体力学では3次元系から様々な2次元系が導出され、それらの研究が行われてきた。

最近、地球流体力学で知られたいくつかの2次元流体系が、ひとつの実数パラメーター α を含んだ非線形移流方程式により記述できることがわかった(Pierrehumbert, *et al.*, 1994). この系は一般化された2次元流体系、もしくは、 α 乱流系と呼ばれている。Navies-Stokes 方程式系(NS系)もしくは Euler系で確立されてきた乱流の描像の普遍性や特殊性について調べられることが期待され、一般化された2次元流体の乱流状態、特にエンストロフィー慣性領域の研究がこの10年間で活発に行われてきた。

しかしながら、一般化された2次元流体に関して、乱流特性以外の研究は行われてこなかった。

2. 研究の目的

一般化された2次元流体系の研究は、地球流体力学で知られた2次元流体系を統一的観点から理解したり、乱流の描像以外にもNS系で確立されてきた様々な流体力学的な概念の普遍性・特殊性について理解することにも貢献できると期待される。

このような動機から流体力学・地球流体力学的に重要な問題である流れの安定性を一般化された2次元流体においても考察することにした。特に平行流の安定性を議論することにした。系に含まれるパラメーター α を変化させることによって一般化された2次元流体系は様々な2次元流体系を表現できる。そこで、流れの安定性や擾乱の成長率、空間構造がパラメーター α にどのように依存するのか、さらにはNS系($\alpha=2$)で確立された概念が、任意の α に対してどこまで適用可能なのかにも注目する。

3. 研究の方法

具体的な流れの安定性や擾乱の成長を調べる前に、どのような性質をもった流れが安定であるのかを判定する定理(NS系で知られているところのRayleighの変曲点定理に対応するもの)の導出を行う。この定理の証明に使用するために、まず波動活動度の保存則の導出を行う。さらに、一般化された2次元流体の支配方程式を非正準形式のHamilton形式に書き下す。波動活動度保存則からは流れの線形安定性を、Hamilton形式からは有限振幅の流れの安定性を議論する。

次に流れの安定性の十分条件を破る流れが与えられたときに、その安定性を解析的に評価するための手法の一つとして、一般化された2次元流体のGreen関数を導出する。

4. 研究成果

(1) 流れの安定性の十分条件

これには2つの方法を採用した。一つは、基礎方程式を(x 方向の成分のみを持つ)基本流の周りで線形近似した方程式を出発点として、波動活動度保存則

$$\frac{d}{dt} \int_D \frac{q^2}{2} dS = 0$$

を導出した。ここで Q_y は平均場の一般化された渦位の y 微分で q' は一般化された渦位の擾乱成分、 D は流れの領域である。 D が二重周期境界条件を満足する矩形領域、無限平面、水路(x 方向に周期的、 y 方向には壁の存在)の場合に上記の波動活動度保存則が導ける。波動活動度保存則から安定性の十分条件

“ Q_y が流れの領域で符号確定であれば、流れは安定である”

を導いた。これは2次元Euler系における流れの安定性の十分条件として知られているRayleighの変曲点定理を、渦度の言葉で書き下したものと同一形式をしている。従って、渦度で表現された平行流の安定性の十分条件は、 α の値に依存しない一般的表式であることが示された。

さらに、一般化された2次元流体系の支配方程式を非正準形式のHamilton形式

$$\frac{dq}{dt} = J \frac{\delta H}{\delta q}$$

$$H = \int_D \frac{1}{2} q^2 dS$$

$$J i = \int_D @q; i$$

に書き下すことに成功した。ここで $\partial(A, B)$ は2次元Jacobianである。このHamilton形式を利用すると、基本流に対する擾乱が有限振幅の場合でも上記の安定性の十分条件が成立することを示した。これらの結果は、日本気象学会欧文レター誌 SOLA への投稿準備中である。

(2) 一般化された2次元流体のGreen関数

上記の安定性の十分条件を破る具体的な流れのプロファイルが与えられたときに、不安定擾乱の α 依存性について調べることを行った。これには2つの方法でアプローチした。一つはいわゆるKelvin-Helmholtz(KH)不安定問題(デルタ関数的な渦層の不安定問題)のような、基本的かつ解析的な不安定問題を解くこと、もう一方は、ジェットのようなより複雑な基本場のプロファイルについて線形固有値問題として数値的に安定性を調べることである。

特に前者について、成果があがった。Euler系におけるKH不安定は運動方程式に基づいて議論されており、渦層で圧力の接続条件を用いて解く。渦度方程式に基づく解法は知られていない。一方、一般化された2次元

流体系では運動方程式は知られていなく、渦度方程式に相当する式が支配方程式である。そのため、この系では KH 不安定は議論できないように思われた。そこで別の方法として、等間隔に配置された一重の点渦列の不安定問題を出発点として、点渦の間隔をゼロにする極限により、KH 不安定を解くことを計画した。そのためには、単位の点渦の作る流れ関数、即ち Green 関数、を知る必要があるが、それは今まで知られていなかった。そこで 流れ関数と一般化された渦度との間の関係式

$$q = \Delta (\Delta \psi)^{\alpha-2}$$

を解くことにより、一般化された 2 次元流体系の Green 関数を導出した。Green 関数は、特定の α の値を除いて Riesz ポテンシャルで与えられる：

(α が偶数以外)

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \tilde{N}(\tilde{\epsilon}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{\alpha-2},$$

$$\tilde{N}(\tilde{\epsilon}) = \frac{1}{2^{\alpha} \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \frac{\tilde{\epsilon}^{\alpha/2}}{\tilde{\epsilon}^{\alpha/2}}.$$

($\alpha = 2m$, ここで m は正の整数)

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \tilde{N}(2m) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{2m-2} (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| + C),$$

$$\tilde{N}(2m) = \frac{\Gamma(1)^{m+1}}{2^{2m} \Gamma(m) \Gamma(m)}.$$

($\alpha = -2m$)

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \Delta (\Delta \psi)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha-1).$$

ここで、 Γ は Gamma 関数、 Δ は 2 次元 Laplace 演算子である。また、この Green 関数から物理的に理にかなった系は α が 3 以下であること、一般化された 2 次元流体の強制乱流状態におけるエンストロフィー慣性領域のスペクトルの冪が $\alpha=2$ を境に転移する、というよく知られた事実も説明することに成功した。これらの結果は Physical Review E に公表された。

(3) 2 次元流体の微分幾何学

上に述べた研究の他に、2 次元流体系に関する新たな研究テーマの発掘も試みた。特に成果が上がったテーマは、2 次元流体の微分幾何学である。2 次元非圧縮性流体の運動は、流れ関数を唯一の未知変数として書き下すことが出来る。この流れ関数を 3 次元空間に埋め込まれた曲面と捉え、その曲面の微分幾何学的性質について議論した。曲面を特徴付ける基本的な量は平均曲率と Gauss 曲率であるが、流れ関数曲面のそれらはそれぞれ渦度と Okubo-Weiss (OW) 場であることを導いた。さらに、非圧縮渦無し流に対する OW 場を複素速度ポテンシャルで表現する公式を導き、様々なポテンシャル流に対する OW 場を計算した。OW 場は移流される粒子の軌道安定性の指標として使用できることが知られており、一方で点渦は移流される

粒子の運動と同じ発展方程式に従うことから、OW 場を用いて点渦列の安定性について議論を行った。単一の点渦、一重と二重の点渦列について解析したところ、OW 場による安定性の評価は既存の安定性の議論と定性的に同じ結論を導くことを示した。これらの研究成果は、Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical に掲載された。なおこの論文は、英国物理学会刊行 (IOP) の学術誌に掲載された論文から「新規性、重要性ならびに今後の研究への潜在的な影響力」に関する秀逸性を基準として選出される IOP select に選ばれた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

① Iwayama, T. and Watanabe, T., Green's function for a generalized two-dimensional fluid. Physical Review E vol. 82 (2010), 036307 (9 pages).

② Yamasaki, K., Yajima, T. and Iwayama, T., Differential geometric structures of stream functions: incompressible two-dimensional flow and curvatures. Journal of Physics A vol. 44 (2011), 155501 (19 pages).

③ Sueyoshi, M., Watanabe, T., and Iwayama, T., Linear and nonlinear stability conditions for parallel shear flows in a generalized two-dimensional fluid system. Submitted to SOLA on May 26th., 2011.

[学会発表] (計 17 件)

① 岩山隆寛, 渡邊威, 村上真也, “減衰性 2 次元乱流におけるエンストロフィー減衰則の転移”, 日本気象学会 2008 年度秋季大会, 2008 年 11 月 19--21 日 (11 月 21 日発表), 仙台国際センター, P302.

② T. Iwayama, T. Watanabe, and S. Murakami, Transition of the decay exponent of enstrophy in two-dimensional turbulence, Workshop on Rotating Stratified Turbulence and Turbulence in the Atmosphere and Oceans, December 8 -12, 2008. (12 月 8 日発表), Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, UK.

③ 村上真也, 岩山隆寛, “孤立した 2 次元非一様楕円渦のパリンストロフィー生成”, 日

本流体力学会 年会 2009, 2009 年 9 月 2--4 日 (9 月 2 日発表), 東洋大学白山キャンパス.

④末吉雅和, 岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系におけるシア不安定”, 日本流体力学会 年会 2009, 2009 年 9 月 2--4 日 (9 月 4 日発表), 東洋大学白山キャンパス

⑤岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系の理論的研究”, 日本航空宇宙学会関西支部, 第 423 航空懇話会, 2009 年 9 月 18 日 (9 月 18 日発表), 神戸大学工学部.

⑥岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系の Green 関数”, 日本気象学会 2009 秋季大会, 2009 年 11 月 25--27 日 (11 月 25 日発表), アクロス福岡, C101.

⑦末吉雅和, 岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系における平行流の安定性: 速度固定条件の場合”, 日本気象学会 2009 秋季大会, 2009 年 11 月 25--27 日 (11 月 25 日発表), アクロス福岡, C102.

⑧ T. Iwayama and T. Watanabe, Green's function for a generalized two-dimensional fluid, CPS 6th International School of Planetary Sciences "Planetary Atmospheres --- Sisters, relatives and ancestors of our own ---", P-09, January 4-9, 2010, Suma Seapal Suma, Kobe, Japan.

⑨ S. Murakami and T. Iwayama, The effect of filaments on the axisymmetrization process of the 2D elliptic vortex with non-uniform vorticity, CPS 6th International School of Planetary Sciences "Planetary Atmospheres --- Sisters, relatives and ancestors of our own ---", P-17, January 4-9, 2010, Suma Seapal Suma, Kobe, Japan.

⑩岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系の Green 関数”, 日本物理学会 第 65 回年次大会, 2010 年 3 月 20--23 日 (3 月 22 日発表), 岡山大学津島キャンパス, 22pEJ9.

⑪ T. Iwayama and T. Watanabe, Green's function for a generalized two-dimensional fluid, Atmospheric Physics Seminar, May 25, 2010, Department of Physics, University of Toronto, Toronto, Canada. (invite)

⑫村上真也, 岩山隆寛, “非一様楕円渦の軸対称化過程におけるフィラメントの役割”,

第 59 回理論応用力学講演会, 2010 年 6 月 8--10 日 (6 月 10 日発表), 日本学術会議, 3E20.

⑬村上真也, 岩山隆寛, “フィラメントによる非一様楕円渦の軸対象化の推進”, 日本流体力学会 年会 2010, 2010 年 9 月 9--11 日 (9 月 10 日発表), 北海道大学札幌キャンパス 高等教育機能開発総合センター, 22pEJ9.

⑭岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系の Green 関数”, 日本流体力学会 年会 2010, 2010 年 9 月 9--11 日 (9 月 10 日発表), 北海道大学札幌キャンパス 高等教育機能開発総合センター, 22pEJ9.

⑮末吉雅和, 岩山隆寛, 渡邊威, “一般化された 2 次元流体系における平行流の安定性: 最大成長擾乱の波数について”, 日本気象学会 2010 年度秋季大会, 2010 年 10 月 27--29 日 (10 月 29 日発表), 京都テルサ, D302.

⑯村上真也, 岩山隆寛, “フィラメントが 2 次元楕円渦の軸対象化に果たす役割”, 日本気象学会 2010 年度秋季大会, 2010 年 10 月 27--29 日 (10 月 29 日発表), 京都テルサ, D305.

⑰岩山隆寛, 山崎和仁, 谷島尚宏, “Okubo-Weiss の基準を用いた点渦列の安定性の研究”, 第 60 回理論応用力学講演会, 2011 年 3 月 8--10 日 (3 月 10 日発表), 東京工業大学大岡山キャンパス, 100235.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩山 隆寛 (IWAYAMA TAKAHIRO)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 10284598

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

渡邊 威 (WATANABE TAKESHI)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号: 30345946

山崎 和仁 (YAMASAKI KAZUHITO)
神戸大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号: 20335417

(4) 研究協力者

末吉 雅和 (SUEYOSHI MASAKAZU)
気象庁・気象研究所気候研究部・研究員

谷島 尚宏 (YAJIMA TAKAHIRO)
東京理科大学・理学部・博士研究員

村上 真也 (MURAKAMI SHINYA)
神戸大学・大学院自然科学研究科・大学院
生