

機関番号：14401  
 研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2008～2010  
 課題番号：20560384  
 研究課題名（和文） 最適化問題から派生する協力ゲームにおける提携実現の制限に関する研究  
 研究課題名（英文） Studies on restrictions on coalition formation in cooperative games derived from optimization problems  
 研究代表者  
 谷野 哲三（TANINO TETSUZO）  
 大阪大学・工学研究科・教授  
 研究者番号：50125605

## 研究成果の概要（和文）：

協力ゲームは複数の意思決定者の協調行動を解析、確立する上で非常に重要である。特に幾つかの協力ゲームは最適化問題から自然に派生することが知られている。その際問題の性質から提携の実現に制限が生じることが考えられる。本研究では、実際にどのような提携制限が生じるのか、またそれが協力ゲームの解にどのような影響を及ぼすのかについて考察を行った。またその研究の過程で協力ゲームに関する基礎的成果も同時に得られている。

## 研究成果の概要（英文）：

Cooperative games are very important to analyze and establish coalitional behaviors of multiple decision makers. Several interesting cooperative games are derived from optimization problems. Some restrictions on coalitions appear naturally in those games. In this research we study structures of restrictions on coalitions and their effects on the solutions of games. We also obtain some additional fundamental results in cooperative games.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

## 研究分野：工学

科研費の分科・細目：電気電子工学・システム工学

キーワード：最適化、協力ゲーム、提携、最小コストスパニングツリー、凸ゲーム、多目的ゲーム

## 1. 研究開始当初の背景

協力ゲーム理論は長い歴史を持ち、多くの意思決定主体（エージェント）が互いに協力・協調してより大きな成果を目指すような状況を数理的に扱うのに無くてはならない分野として発展してきた。その結果コアやシャ

ープレイ値といった有用な解概念がなされさらに凸ゲームなどの有用なクラスのゲームの特徴づけや、より実際的な状況に対応するための制限された提携構造の取り扱いなどが近年発展してきた。

一方最適化は更に長い歴史を持つ理学、工

学、経済学など人間活動のありとあらゆる分野で必要とされる基礎科学であり、さらにコンピュータの発展と共にこの半世紀に一層の発展を遂げてきた。その成果は解の導出アルゴリズムだけではなく、さまざまな理論的成果も生み出してきている。

この最適化が複数のエージェントの存在する状況において生じるときに、協力ゲームが派生することが幾つかの問題に対し明らかにされていた。その代表的なものが小さなコストでネットワークを構築する最小コストスパニングツリー問題、最小の費用で最大のコストを生み出す生産計画を考える生産計画問題、複数のジョブを効率的に扱うスケジューリング問題などである。

研究代表者はもともと最適化の理論的研究を中心的な研究テーマとしていたが、その後以前から興味をもっていたゲーム理論についても研究に従事し、特に21世紀に入ってからには提携に制限のある協力ゲームの特性とその解に関する研究で成果を発表してきていた。その特徴は、問題の数理的認識とより一般性を持った理論的成果の導出であり、システム工学的及び数理工学的視点に重点をおいた姿勢で研究を続けてきた。

こういった協力ゲーム理論と最適化という2つの重要な分野にまたがり、代表者の研究履歴からも成果の期待できるテーマとして、最適化問題から派生する協力ゲームにおける提携実現の制限に関する研究を実施することとした。

## 2. 研究の目的

本研究では、最適化問題から派生する協力ゲーム（提携形ゲーム）において、提携の実現可能性の制限を考慮した場合を数理的に取り扱う。すなわち本研究は最適化とゲーム理論を組み合わせたシステム工学的課題に取り組むことを意図したものである。

まず研究の学術的背景について述べる。現実社会の意思決定問題においては、複数の意思決定主体が協力を前提として行動を決定することが要求される。このような問題を取り扱う手法が協力ゲーム（提携形ゲーム）の理論であり、その有効性は広く認識されている。提携形ゲームでは、プレイヤー（意思決定主体）全体の集合の部分集合である提携に対しその提携が獲得可能な値を対応させる特性関数を基に、各プレイヤー間での合理的な利得配分が議論され、コアやシャープレイ値をはじめとする様々な解が提案されている。ただし、その多くはすべての提携が等しく実現可能であることを仮定している。

しかしながら、現実社会においてはすべての提携が実現可能であるとは限らないことか

ら、各々の提携の実現可能性に配慮した利得の分配法について考察した研究が近年多く見られるようになり注目を集めている。これらの研究は、より一般的な枠組みで協力ゲームを捉えることを可能にしており大きな意義を持っている。代表者自身も幸い「提携に制限のある協力ゲームの特性とその解に関する研究」により科学研究費補助金の援助を受け、この分野の研究を進めいくつかの興味深い成果を得ることができており、内外の研究者と意見交換も行っている。

一方、ゲーム理論は非常に学際的な研究分野であるが、それは対象となる実際的な問題が社会、経済、産業、理学の様々な状況から生じることによって起因している。代表者は長年に渡り最適化の研究に関与してきているが、最適化問題は環境により規定される実行可能領域の中で、何らかの評価基準（目的関数）を最大化（あるいは最小化）する解を求めるものである。したがって問題が複数の意思決定者に関連して定まるなら、関与する意思決定者集合に対応して1つの最適化問題が得られる。すなわち意思決定者全体をプレイヤー集合とみなすならば、その部分集合である提携に対応して得られる最適化問題の最適値を提携の値（提携が獲得することのできる利得）とみなすことにより、協力ゲーム（提携形ゲーム）が定義される。このような最適化問題に起因する協力ゲームも近年注目を集めており、生産計画問題、最小コストスパニングツリー問題、スケジューリング問題など多くの最適化問題から派生するゲームについて精力的な研究が進められている。

本研究は、こういった最適化問題から派生する協力ゲームにおいて、提携に制限が生じた場合にどのような結果が生じるのかを明らかにしていくことを目的とするものである。このような提携の実現可能性の問題は企業間の提携の実現可能性や、ネットワークの構築の実現可能性を考えれば実際に生じることは極めて自然であることから、実際の意義も大きいものと考え今回の研究を行うに至った。

既に述べたように、最適化問題から派生する協力ゲームには幾つかのものがある。中でも興味深い問題として本研究で中心的に取り上げるのは、最小コストスパニングツリー問題である。この問題では、ソースと呼ばれる電力、水力あるいは情報のような資源の供給地点が1つあり、その資源の供給を必要としている複数の地点が存在する。各地点間を結ぶラインを構築するには当然コストが必要である。このような状況はソースを含む各地点をノードとして持つネットワークとして表現

される。そのネットワークにおいてすべてのノードを最小コストで結ぶグラフはツリーとなるが、それ（最小コストスパニングツリーと呼ばれる）を求めるのが最小コストスパニングツリー問題である。

最小コストスパニングツリー問題では、最小コストスパニングツリーを構成するのに必要なコストをエージェント間でどのように分担するかが重要な課題であり、Bird ルール、責任ルールといった様々な分担決定方法（ルール）が提案されている。本研究では、ノード間のコストを通じてグループ構造や階層構造といった構造を導入し、その影響が形成される最小コストスパニングツリーやコスト分配にどう影響を与えるかを明らかにする。特にグループ構造に対しては、構造を反映した分担決定ルールについても詳細な検討を加える。

さらに、本研究では基礎となる最適化問題が多目的最適化問題である場合にそこから派生する協力ゲームも扱うことを念頭においている。多目的協力ゲームは通常のゲームというところの提携の値、すなわちゲームの特性関数値が実数（スカラー）ではなくベクトルで与えられるベクトル値ゲームから、さらには値が多次元空間の集合で与えられるより一般的なゲームへと発展してきている。ゲームの優加法性や凸性の概念も提案されている。さらには多目的生産計画問題や多目的最小コストスパニングツリー問題から派生する多目的ゲームの研究もある。本研究では、そのような過去の成果を生かし、多目的ゲームにおいて提携に制限を加えた場合についても考察を加える。

最後に本研究の学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義について述べる。まず本研究のひとつの特色として、システム科学の非常に重要なキーワードである、「最適化」と「ゲーム理論」を結びつける研究である点が挙げられる。これら2つが重要であるのは、理論的にも極めて興味深く有効な数理的取り扱いが可能であることと、実際問題を扱う際にも適切なモデルになりうることの両方が成り立つことによる。したがって本研究も数理的・理論的アプローチを基本としてはいるが、広範な適用の可能性を秘めている。

さらに、提携の実現可能性に制限を設け、加えてその拡張も考慮することにより、幅広い実際の状況を扱うことのできる基礎概念、基礎結果を用いて、この重要な対象である「最適化問題から派生する協力ゲーム」に取り組んでいくことが独創的である。

このように本研究は、協力ゲームにおいて

理論的にも実際的にも重要で興味深い「最適化問題から生じる協力ゲーム」に対し、近年の重要な研究課題となっている提携の実現可能性を考察していくものであり、結果として協力ゲーム理論のさらなる発展に大きく寄与するものと確信している。もちろん最適化が幅広い実際問題を対象にもっていることから、今回の研究の成果は多くの実際問題への適用の可能性をもっており、その実際の意義も大きいと考えられる。

### 3. 研究の方法

本研究は、数理的な観点からのシステム工学の理論的研究である。したがって対象とする問題を明瞭に数学的に定義して扱っていくことが研究全体を通しての基本的な方法、アプローチとなる。

まず協力ゲーム（提携形ゲーム）は $n$ 人のプレイヤーからなる集合 $N$ とそのベキ集合 $P(N)$ 上で定義された実数値関数 $v$ の対 $(N, v)$ で与えられる。ただし、空集合に対する $v$ の値は $0$ とする。 $P(N)$ の要素すなわち $N$ の部分集合 $S$ のことを提携という。通常より大きな提携を組むことでプレイヤーはより大きな利益を得ることができると仮定されるので、全体提携 $N$ が形成されると考える。協力ゲームにおける中心的課題はそのときの利得 $v(N)$ をプレイヤー間でどう分配すれば合理的かということである。

そこで各成分が対応するプレイヤーへの分配利得であるような $n$ 次元のベクトル $x$ を考え、それをどう定めるかが考察される。これをゲームの解と呼び、その代表的なものとして $v(N)$ を過不足なく分配するという全体合理性条件といずれの提携からも異議が生じないという提携合理性条件を満足する $x$ の集合であるコアと、各プレイヤーの様々な提携への貢献度の平均値として定義されるシャープレイ値がある。この2つの解概念には特に凸ゲームと呼ばれるクラスのゲームに対して、シャープレイ値がコアの重心になるという非常に好ましい性質が成り立つ。このように凸ゲームは協力ゲーム全体の中でも良好な問題のクラスを形成することから、最適化問題から派生するゲームが凸になるかどうかには注意することは大いに意味がある。

本研究でも基礎的な凸ゲームの性質、特徴づけを議論しそれに基づいた考察を進めるよう務めた。特にプレイヤー集合を固定した場合、ゲームの全体が有限次元の線形空間をなし、その基底として満場一致ゲームが取ることができる。さらにこの基底を用いてゲームを満場一致ゲームの線形和で表現したときの係数が Harsanyi dividend と呼ばれ、協力ゲームの理論的研究においては必要不可

欠な概念となっている。

プレイヤーの協力の成果が実数値で表されるのが通常の協力ゲームであるが、近年の最適化に見られるように複数の目的関数、評価基準を同時に考慮することは実際問題を扱う際に非常に重要である。そこで提携値が多次元の実数値ベクトルさらにはより一般的な多次元実空間の集合で表される多目的協力ゲームについてもその基礎的考察を進めた。すなわち各提携  $S$  に対し (目的関数の数に等しい次元の) 多次元空間の部分集合  $V(S)$  を定めるような集合値写像で与えられる多目的ゲームを考える。多次元ベクトル間の半順序を通常用いられるものとしたとき、そのようなゲームの優加法性は、2つの共通プレイヤーを持たない提携が合体してより大きな提携を形成したときにその値集合が、個別の提携に対する値集合の和を優越する (ベクトル半順序でより大きい) 性質として定義可能である。さらに、凸性も同様な考え方で、通常のゲームの凸性を拡張することにより定義することが可能である。さらに、全体合理性、提携合理性の概念を用いることによりコアの概念が拡張的に定義可能である。

本研究では、こういった既存の研究成果をベースにして、提携に制限のある場合の制限多目的協力ゲームの定式化を考える。この場合の実現可能提携システムとしては分割システムを考える。このときの制限ゲームの凸性やコアの性質を論じる。

最適化問題から派生する協力ゲームとして、本研究では最小コストスパニングツリー問題をその中心に据えた。この問題は、ソース 0 とこのソースから資源の供給を受けることを望んでいる  $1, 2, \dots, n$  で表されるエージェントが存在する状況を扱う。ソース或いはエージェント (まとめてノードと呼ぶ)  $i, j$  間をリンクで結ぶのにはコスト  $c(i, j)$  が必要であるとし、それらをまとめた  $(n+1) \times (n+1)$  行列  $C$  のことをコスト行列という。すべてのエージェントがソースと結ばれたネットワークのうちでそのリンクのコストの総和を最小にするものを最小コストスパニングツリーという。コストの対称性  $c(i, j) = c(j, i)$  と非負性を仮定することから、上記のネットワークがツリーとなり用語の正当性が保証される。

近年 Bergantinos and Gomez-Rua は、エージェント (都市) を幾つかのグループ (県に相当) に分けたグループ構造を導入している。このグループ構造は、ノード間のコスト行列に反映させることが可能である。実際、同じグループ内のノードを結ぶ枝のコストは他グループのノードと結ぶときのコストより小さいと考えるのは妥当である。この様な構造の下では、最小コストスパニングツリーがグループ内のツリーにグループ間の枝

を付け加えたような形になる。すなわち構造から自ずと形成されるリンクに制限が加わる。いいかえると提携の形成に制限が生じる。

このことは、最小コストスパニングツリー問題から派生する協力ゲームを考える際に、コスト行列に適当な制限をつけることで、提携実現の制限を考察できることを示唆している。そこで本研究では、グループ構造以外に階層構造を提案し、その構造の下でどのような形の最小コストスパニングツリーが形成されるかについて考察を進める。またグループ構造の下ではコストの分配を、グループ間でのコスト分配とその結果に基づくグループ内でのコスト分配の2段階で考えることが可能であることを一般的に示す。さらに、そのような分配法がどのような性質をもつか詳細な検討を行う。

#### 4. 研究成果

まず、多目的最適化問題から派生する協力ゲームを扱うためにも基礎となる多目的協力ゲームについての成果を述べる。研究方法のところでも説明したように、本研究で扱うのは、プレイヤー集合  $N$  のベキ集合  $P(N)$  上で定義され多次元実数空間の集合を値にもつ集合値関数で定められる一般的な多目的ゲームである。このゲームに対し分割システムで与えられる実現可能提携システムを考えた場合、得られる制限ゲームは優加法的であることを示した。また実現可能提携システムがより強い交差システムである場合には制限ゲームの凸性が遺伝される (すなわち元のゲームが凸であれば制限ゲームも凸になる) ことを示した。また制限ゲームに対するコアの特徴づけも与えた。さらに、これらの成果を含み、多目的生産計画問題や多目的最小コストスパニングツリー問題から派生するゲームに関する研究成果もまとめた内容を、Vector Optimization のモノグラフの1章として分担執筆をした。

また、協力ゲームの凸性のもつ様々な側面についても、Harsanyi dividend に着目して広い視点から検証した結果を論文として発表した。さらに各プレイヤーの提携への参加度も考慮するためにゲームの定義域を拡張する方法、及び拡張されたゲームにおける解についても考察し、論文としてまとめた。

以下は、本研究で中心的に対象とした最小コストスパニングツリー問題とそこから派生する協力ゲームに関する成果について述べる。

前節で述べたようにこの問題に対する制限はコスト行列に反映させることが可能である。そこでエージェント集合をいくつかの階層に分け、階層内はリンクコストが高く (ここがグループ構造と異なる)、階層間ではより近い階層との間のリンクコストがよ

り小さくなるような「階層構造」を導入した。このような階層構造の下では、最小コストスパニングツリーもソースを根にもち階層的になることを示した。さらに、責任関数をソースに近いエージェントが全責任を負うように定めると責任ルールと Bird ルールが一致すること、さらに強い仮定を置くと責任関数の如何に関わらず多くのコスト分担ルールが一致することなどを明らかにした。これにより階層構造をもつ問題でのコスト分担法が比較的簡単に定められることもわかった。

次にグループ構造を導入した場合について、まず全体の最小コストスパニングツリーがグループ内での最小コストスパニングツリーにグループ間の小さいコストの枝を必要なだけ付け加えた形状になることに着目し、コスト分担もまず第1段階でグループの間での分担を定めその結果に基づいて第2段階でグループ内での分担を定める、2段階ルールを一般的に提案した。各段階でのルールとしては既存のルールを用いればよいので当然多くの可能性がある。それらがコアからの選択性、コスト単調性、エージェント数単調性、対称性、制限つき加法性、など20ほどの諸性質のいずれを満足するのかを詳細に検討し、各ルールのもつ特徴を明らかにした。

さらに各段階での分担ルールとして責任ルールを用いた場合には、そのルールそのものが2段階ではなく通常の責任ルールによっても実現できることを証明した。もちろんその際に用いる責任関数は各段階での責任関数から適切に導出される必要があり、その導出法も明らかにした。この結果を用いるとコスト分担ルールが例えば最も標準的な同等責任ルールである場合に、グループメンバーはグループとして行動するのと独自に行動するのといずれが得策かといった問題も考察できることが明らかになった。

またコスト分担は協力ゲームとしてではなく、各エージェントが誰とリンクを形成したいかを表明する新しいタイプの非協力ゲームとしても捉えることができることを示し、そのナッシュ均衡で最小コストスパニングツリーを形成できる解を提案することが出来た。この成果については近い機会に発表をする予定である。

他の重要な最適化問題であるスケジューリング問題に基づくシーケンシングゲームでは、各自関連のジョブを持ったエージェントが複数存在する。通常は隣接したジョブ同士が順序交換可能であり、その結果得られるコストの改善を関連エージェント間でどう分配するかが、協力ゲームとの関連で議論されている。こういったゲームでも提携に制限を加えることがゲームの性質やその解にどのよう

な影響を与えるかについても検討し、若干の結果を得ているが未発表である。

以上のように、本研究では最小コストスパニングツリー問題を中心とする最適化問題から派生する協力ゲームにおける提携実現の制限に関する幾つかの理論的成果が得られた。併せて多目的協力ゲーム、凸協力ゲーム、協力ゲームの拡張についても副産物的な成果を得ている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

1. T. Tanino: Some Considerations on Extensions of Cooperative Games, 京都大学数理解析研究所講究録 No. 1643, pp. 193-202, 2009, 査読無
2. T. Tanino: Multiobjective cooperative games with restrictions on coalitions, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 618, pp. 167-174, 2008, 査読有

[学会発表] (計9件)

1. T. Tanino and M. Wada: Minimum cost spanning tree problems with groups, 13<sup>th</sup> Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making in Service Sciences, Otaru, Nov. 4, 2010
2. T. Tanino: One-point solutions obtained from best approximation problems for cooperative games, 2<sup>nd</sup> Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Phuket, Sep. 11, 2010
3. T. Tanino: On convexity of cooperative games, RIMS 研究集会「非線形解析学と凸解析学の研究」, 京都, Aug. 31, 2010
4. T. Tanino: Cost allocation in minimum cost spanning tree problems with groups, Abstract Harmonic Analysis 2009, Kaohsiung, Dec. 18, 2009
5. T. Tanino: Minimum cost spanning tree situations with some structures, 12<sup>th</sup> Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty, Litmishel, Sep. 13, 2009
6. T. Tanino: Minimum cost spanning tree situations with some structures, 22<sup>nd</sup> Workshop on Methodologies and Tools for Complex System Modeling, Laxenburg, Aug. 31, 2009

7. T. Tanino: Cost allocations in minimum cost spanning tree situations with some structures, 6<sup>th</sup> International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Tokyo, Mar. 27, 2009
8. R. Kadowaki, T. Tanino and K. Tsumi: Comparative studies on cost sharing schemes in minimum cost spanning tree situations, Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Matsue, Sep. 16, 2008
9. T. Tanino: Cost sharing in minimum cost spanning tree situations from the viewpoint of cooperative games, Fourth Sino-Japanese Optimization Meeting, Aug. 27, 2008

[図書] (計1件)

1. Tetsuzo Tanino: Vector Optimization and Cooperative Games, in: Q. H. Ansari and J-C Yao (eds.) Vector Optimization, Chapter 14, pp. 419-441, Springer-Verlag, 2011

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

谷野 哲三 (TANINO TETSUZO)  
大阪大学・工学研究科・教授  
研究者番号：50125605