

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月28日現在

機関番号： 14301
 研究種目： 若手研究（S）
 研究期間： 2008～2012
 課題番号： 20674001
 研究課題名（和文）志村多様体を核とした数論幾何学，ガロア表現，保型表現の総合的研究
 研究課題名（英文）Comprehensive studies on Shimura varieties, arithmetic geometry, Galois representations, and automorphic representations
 研究代表者
 伊藤 哲史（ITO TETSUSHI）
 京都大学・大学院理学研究科・准教授
 研究者番号：10456840

研究成果の概要（和文）：

志村多様体・ガロア表現・保型表現の関連分野において活発な研究を行っている若手外国人研究者を多数招聘し国際研究集会を多数主催した。大学院生を含む若手研究者を対象とした最先端のトピックに関する研究集会を多数主催した。参加者と活発な研究打ち合わせやセミナーを行うことで既成の分野の枠にとらわれない総合的研究を推進し、志村多様体やその局所版であるラポポート-ジंक空間の幾何学やコホモロジーに関する新しい知見を得た。

研究成果の概要（英文）：

We invited many young foreign researchers working actively on the topics related to Shimura varieties, Galois representations and automorphic representations, and organized several international workshops. We organized several workshops on recent advanced topics for young researchers including graduate students. We actively had discussions and seminars with the participants, and promoted comprehensive studies by not being obsessed with existing categories of topics. We provided new insights into the geometry and the cohomology of Shimura varieties and Rapoport-Zink spaces which are local analogues of Shimura varieties.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008	6,200,000	1,860,000	8,060,000
2009	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2010	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2011	5,800,000	1,740,000	7,540,000
2012	5,800,000	1,740,000	7,540,000
総計	2,940,000	8,820,000	38,220,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学，ガロア表現，保型表現，志村多様体

1. 研究開始当初の背景

数学において中学生や高校生にも理解できるような素朴な問題が、高度な道具を使うことで初めて証明されることがある。ワイルズが350年以上に渡って未解決だったフェルマーの大定理『 n を3以上の整数とすると、 $x^n + y^n = z^n$ をみたす自然数は存在しない』

を解決したことは記憶に新しい。ワイルズによる証明は、モジュラー曲線，ガロア表現，保型表現といった数論幾何学の最先端の道具を駆使する非常に高度なものであった。素朴な方程式の背後に、深遠な大理論が隠されていたのである。

ワイルズの研究以降、志村多様体の研究が

ますます活発になってきている。志村多様体とはモジュラー曲線を一般化した代数多様体（方程式で定義された図形）である。しかも従来は別々の興味の対象として別々の研究グループによって別々の視点から研究されることが多かった数論幾何学の諸理論やガロア表現、保型表現といった対象が、最近では、志村多様体を舞台として統一的な視点から深く研究されるようになってきた。そして、個々の対象が有機的につながりあい、多くの重要な応用が得られるようになってきた。志村多様体・ガロア表現・保型表現の関連分野において、代数・幾何・解析といった既成の分野の枠にとらわれない総合的研究の必要性が高まっていた。

2. 研究の目的

このような状況を踏まえ、本研究課題では、志村多様体を核として研究代表者を中心に世界的に活発な研究を行っている外国人研究者を含む若手研究者のグループによる総合的研究を行い、数論幾何学の諸理論やガロア表現、保型表現などに対する新しい知見を得ることを目的とした。個々の分野の個々の問題に取り組むことももちろん大切であるが、それ以上に、旧来の発想にとらわれない若手研究者を中心として、既成の分野の枠にとらわれない活発な研究活動を行い、今までに無い新しい着眼点で新しい理論を構築し、新しい応用を得ることを目指すことが重要である。

3. 研究の方法

上記の目的を達成するための具体的な研究の方法は次の通りである。研究代表者のこれまでの研究成果を踏まえて、志村多様体の p 進一意化理論とハッセ不変量の一般化に関する研究を行う。また、研究をより発展・進展させるために、ラポポート-ジンク空間、志村多様体の p 進一意化理論、 p 進周期写像、岩堀ヘッケ環の表現論、 p 進ラングランズ対応などに関する研究を行い、また、それらの間の相互関係に関する総合的研究を行う。研究をさらに進展させるために、志村多様体の関連分野において世界的に活発な研究を行っている若手外国人研究者を多数招聘し、研究打ち合わせやセミナーを行う。志村多様体の数論幾何学やその関連分野に関して、国内外から数名程度の若手研究者を招聘し、大学院生を含む若手研究者を対象とした最先端のトピックに関する研究集会を開催する。必要に応じて最先端のトピックに関する発展的な講義を行い、研究代表者、参加者を含めて活発な議論を行い、研究をさらに進展させる。また、必要に応じて、関連する他分野の研究者とも積極的に情報交換・議論を行い、既成の分野の枠にとらわれない総合的研究

を推進する。

4. 研究成果

本研究課題により得られた成果は以下の通りである。

平成 20 年度には志村多様体の数論幾何学およびそれに関連した幾何学、ガロア表現、保型表現の研究を行った。正標数アーベル多様体のモジュライの研究を行い、超特異アーベル曲面のモジュライ空間の既約成分が射影直線になることと、射影直線の 1 次コホモロジーが消えることを用いて、3 次元ジーゲル多様体のエタールコホモロジーに関する結果を得た。これは、表現論・位相幾何学・ホッジ理論などの手法を用いて従来より知られていた結果に対して、新しい数論幾何的な解釈を与えるものである。今後、より一層の精密化・一般化が望まれる。ゼータ関数の局所因子（悪い因子）への応用や、4 次斜交 $\mathrm{GSp}(4)$ の保型表現に伴うガロア表現への応用も期待される。また、楕円曲線に伴うガロア表現に関する研究や、保型表現の持ち上げ定理の研究を行い、いくつかの楕円曲線に対して佐藤-テイト予想に関する結果を得た。

平成 21 年度は前年度の研究に引き続き志村多様体の数論幾何学およびそれに関連した幾何学、ガロア表現、保型表現の研究を行い、研究をより発展・進展させた。具体的には、正標数アーベル多様体のモジュライの研究を行い、3 次元ジーゲル多様体の極小コンパクト化とトロイダルコンパクト化のコホモロジーに関する結果を得た。この結果は、昨年度の研究をさらに推し進めたものであり、ゼータ関数の局所因子への応用や、4 次斜交群 $\mathrm{GSp}(4)$ の保型表現に伴うガロア表現への応用も期待される。また、楕円曲線に伴うガロア表現に関する研究や、保型性の持ち上げ定理、佐藤-テイト予想に関する研究も行った。

平成 22 年度には前年度までの研究に引き続き、志村多様体の数論幾何学およびそれに関連した幾何学、ガロア表現、保型表現の研究を行い、研究を進展させた。数論幾何的手法と保型表現論的手法を組み合わせることで、大域体上の $\mathrm{GL}(2)$ の保型 L 関数の関数等式での位数に関する結果を得て台湾で行われた国際研究集会で発表した（千田雅隆氏との共同研究）。4 次斜交群 $\mathrm{GSp}(4)$ の志村多様体およびその局所版であるラポポート-ジンク空間の研究を行い、超尖点的表現がコホモロジーに実現する様子についての結果を得て、京都大学で行われた国際研究集会で発表した（三枝洋一氏との共同研究）。

平成 23 年度には前年度の研究をさらに進展させた。大域的手法と局所的手法を組み合わせることで、4 次斜交群 $\mathrm{GSp}(4)$ および 3

変数ユニタリ群 $GU(3)$ のラポポート-ジンク空間に超尖点的表現が実現される様子について研究を行い、各次数のコホモロジーに現れる表現についての結果を得た。中間次数以外のコホモロジーにも超尖点的表現が現れることを示した。このような結果は専門家の間でも予想されておらず、また、この結果はラポポート-ジンク空間のコホモロジーと既約許容表現のパケット (Lパケット・Aパケット) の構造の関係を強く示唆するものである (三枝洋一氏との共同研究)。ルビン-テイト空間の安定モデルの特殊ファイバーに現れる代数多様体のコホモロジーと、有限環上の代数群の表現論に現れるルスティック多様体 (ドゥリーニュ-ルスティック多様体の一般化) のコホモロジーの関係を研究した (津嶋貴弘氏との共同研究)。

本研究課題の最終年度である平成 24 年度には、昨年度までの研究をさらに発展させ、引き続き志村多様体の数論幾何やガロア表現に関する研究を進めた。昨年度までの研究で 4 次斜交群 $GSp(4)$ および 3 変数ユニタリ群 $GU(3)$ のラポポート-ジンク空間に超尖点的表現が実現される様子が分かってきたので、本年度は、より一般のラポポート-ジンク空間のコホモロジーの研究を進めた。今までに知られていた結果や、LパケットやAパケットに関する種々の予想・定理、実リ一群の表現論における類似などを総合的に考察することで、粗い形の予想を定式化することができた。これはまだ精密化の余地があり、今後、正しい予想を定式化し証明することは重要な課題であると思われる。

また、以上の研究を推進するため、本研究課題の一環として若手研究者を対象とした国際研究集会・研究集会を多数主催し、関連する他分野の研究者とも積極的な情報交換・議論を行った。主催した研究集会は以下の通りである。

平成 20 年度

- ・ 国際研究集会「Workshop on Shimura Varieties, Automorphic Representations and Related Topics」, 平成 20 年 11 月 25 日~28 日, 京都大学数学教室 (加藤和也氏と共同)
- ・ 研究集会「愛媛整数論集会」, 平成 21 年 2 月 17 日~20 日, 愛媛大学理学部数学教室 (谷口隆氏, 平野幹氏と共同)

平成 21 年度

- ・ 「岩澤理論ミニ勉強会」, 平成 21 年 4 月 2 日, 京都大学数学教室
- ・ 国際研究集会「p-adic Automorphic Forms and Arithmetic Geometry」, 平成 21 年 7 月 28 日~31 日, 宮城県気仙沼市大島開発総合センター (千田雅隆氏と共同)

- ・ 国際研究集会「金沢数論幾何集会」, 平成 21 年 11 月 24 日~27 日, 石川県文教会館

平成 22 年度

- ・ 「岩澤理論ミニ研究集会」, 平成 22 年 4 月 3 日~5 日, 京都大学数学教室
- ・ 研究集会「数論幾何とその周辺」, 平成 22 年 7 月 19 日, 京都大学数学教室 (玉川安騎男氏と共同)
- ・ 国際研究集会「L 関数の特殊値と数論幾何」, 平成 22 年 10 月 8 日~11 日, 美山町自然文化村河鹿荘 (千田雅隆氏と共同)
- ・ 「 $GL(n)$ の保型表現論 夏の学校」, 平成 22 年 7 月 24 日~30 日, 倉敷シーサイドホテル

平成 23 年度

- ・ 国際研究集会「Workshop on the arithmetic geometry of Shimura varieties and Rapoport-Zink spaces」, 平成 23 年 7 月 4 日~8 日, 京都大学数学教室
- ・ 「 $GL(n)$ の保型表現論 夏の学校」, 平成 23 年 8 月 24 日~31 日, 倉敷シーサイドホテル (千田雅隆氏, 阿部紀行氏と共同)
- ・ 「定山溪数論的表現論研究集会」, 平成 24 年 1 月 28 日~30 日, 研修保養施設倶楽部錦溪 (阿部紀行氏と共同)

平成 24 年度

- ・ 国際研究集会「数論幾何とその周辺」, 平成 24 年 4 月 9 日~11 日, 京都大学数学教室 (谷口隆氏, 千田雅隆氏, 三枝洋一氏と共同)
- ・ 国際研究集会「Workshop on the arithmetic geometry of Shimura varieties, representation theory, and related topics」, 平成 24 年 7 月 18 日~22 日, 北海道大学理学部 (阿部紀行氏, 三枝洋一氏と共同)
- ・ 「保型表現論 夏の学校」, 平成 24 年 8 月 20 日~27 日, 倉敷シーサイドホテル

これらの研究集会には志村多様体・ガロア表現・保型表現の分野において活発な研究を行なっている国内外の若手研究者を招聘した。講演・講義は原則として英語で行い、若手研究者を中心とした有意義な情報交換の場となるようにした。

志村多様体・保型表現・ガロア表現の関連分野においてこれだけの規模・内容の研究集会が集中的に行われたことは世界的に見てもほとんど例が無い。本研究課題の一環として開催した研究集会で発表された結果には日本国内で初めて発表された結果も多く、最

先端の話題に関する研究打ち合わせを行うことができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① 伊藤哲史, 『ガロア理論と淡中 - クライン双対性』, 数学セミナー2013年1月号, 18-23 ページ, 2013年, 査読無し.
- ② 伊藤哲史, 『非可換類体論の現状, ゼータ関数の解析接続法』, 数理科学 2011年1月号, 40-45 ページ, 2011年, 査読無し.
- ③ 伊藤哲史, 『合同ゼータのリーマン予想とその発展・影響』, 数学セミナー2009年11月号, 18-23 ページ, 2009年, 査読無し.
- ④ 伊藤哲史, 『有限体上の楕円曲線の有理点ハッセの定理』, 数学書房編「この定理が美しい」, 20-29 ページ, 2009年, 査読無し.
- ⑤ 伊藤哲史, 『佐藤 - テイト予想の証明の方針』, 数学のたのしみ 2008 最終号, 日本評論社, 118-132 ページ, 2008年, 査読無し.

[学会発表] (計 28 件)

- ① 伊藤哲史, 『Supercuspidal representations in the cohomology of the Rapoport-Zink space for the unitary group in three variables』, Automorphic Representations and Related Topics, 2013年1月23日, 京都大学数理解析研究所.
- ② 伊藤哲史, 『Supercuspidal representations in the cohomology of the Rapoport-Zink space for the unitary group in three variables』, Workshop on Modular forms and Galois Representations, 2013年1月7日, Korea Institute for Advanced Study, 韓国.
- ③ 伊藤哲史, 『p-adic uniformization of Shimura varieties and applications』, KIAS Intensive Lecture Series on Rigid Geometry and the Local Langlands correspondence, 2012年1月5日, Korea Institute for Advanced Study, 韓国.
- ④ 伊藤哲史, 『l-adic cohomology of Rapoport-Zink spaces and supercuspidal packets』, Workshop on the arithmetic geometry of Shimura varieties and Rapoport-Zink spaces, 2011年7月7日, 京都大学数学教室.
- ⑤ 伊藤哲史, 『On the l-adic cohomology of the Rapoport-Zink space for $\mathrm{GSp}(4)$ 』, The Second PANT (PanAsian Number Theory) Conference, 2010年9月16日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑥ 伊藤哲史, 『On the order of vanishing of automorphic L-functions for $\mathrm{GL}(2)$ over

global fields at the center of functional equation』, Workshop on arithmetic geometry and related topics, 2010年7月12日, National Taiwan University, 台湾.

- ⑦ 伊藤哲史, 『Logarithmic geometry and Deligne-Rapoport's integral models』, Workshop on Automorphic Representations, Geometry, and Arithmetic, 2009年7月23日, National Taiwan University, 台湾.
- ⑧ 伊藤哲史, 『On the cohomology of supersingular loci of Siegel threefolds』, p-adic Hodge theory, p-adic modular forms and applications, 2009年7月14日, Centre de Conférences de la Station de Biologie, Marine, Roscoff, フランス.
- ⑨ 伊藤哲史, 『On the l-adic cohomology of Siegel threefolds in characteristic p』, PANT 2009 - Pohang, Pan Asian Number Theory Conference, 2009年1月10日, POSTECH(浦項工科大学), 韓国.
- ⑩ 伊藤哲史, 『On the l-adic cohomology of Siegel threefolds in characteristic p』, 代数的整数論とその周辺, 2008年12月9日, 京都大学数理解析研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 哲史 (ITO TETSUSHI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 10456840